ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

**Рубцовский индустриальный институт ГОУ ВПО
«Алтайского государственного технического университета
им. И.И. Ползунова»**

Е.С. БЕЛЯЕВА

ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА

Курс лекций

**Методические указания для студентов специальности
060400 «Финансы и кредит»
дневной и заочной форм обучения**

Рубцовск 2006

УДК 336.6

Беляева Е.С. Финансовая математика: Курс лекций: Методические указания для студентов специальности 000400 «Финансы и кредит» дневной и заочной форм обучения / Рубцовский индустриальный институт. - Рубцовск, 2006. – 89 с.

В методических указаниях в доступной форме раскрыты основные понятия финансовой математики, приведены основные алгоритмы, используемые при решении задач финансового характера. Подробно рассмотрены процессы наращения и дисконтирования, схемы оценки денежных потоков. Изложены некоторые практические приложения количественного финансового анализа. В каждой теме содержится обязательная терминология, контрольные вопросы, примеры решения задач. Приведены основные финансовые таблицы, облегчающие решение задач, литература.

Рассмотрены и одобрены
на заседании НМС РИИ
Протокол № 1 от 31.01.06.

Рецензент: к.э.н., доцент О.В. Асканова

СОДЕРЖАНИЕ

Раздел 3. Практические приложения методов финансового количественного анализа

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время в России началось активное возрождение финансовой математики. Финансовая математика имеет преимущественно практический характер. С ее помощью решаются многие задачи, которые так или иначе присутствуют в любой финансово-банковской операции или коммерческой сделке. Иногда эти задачи настолько просты, что их можно решить даже без специальных знаний, например, практически каждый может по привычным рецептам самостоятельно просчитать график погашения потребительского кредита, сумму процентов за долг и остаток долга на конец месяца. Но и в этих случаях все же надежнее, если понимать, почему делается так, а не иначе.

Принятие правильных решений требует сочетания экономических, юридических и математических знаний как в быту, так и особенно в производственной, коммерческой деятельности.

Реальные задачи финансовой математики, в отличие от обычных математических задач, не всегда имеют однозначное верное решение, поэтому часто возникает необходимость в выборе оптимального решения из нескольких имеющихся вариантов при учете определенных факторов.

В дореволюционной России коммерческая арифметика развивалась в рамках финансового анализа как одно из его направлений. В годы советской власти эти направления были принижены и лишь с начала 90-х годов стали медленно, но неуклонно развиваться.

Основной целью курса «Финансовая математика» является приобретение студентами теоретических знаний в области финансовой математики, количественного финансового анализа и практических навыков расчетов основных параметров типовых финансовых операций с учетом влияния на их конечный результат и принимаемые решения фактора времени.

Освоение студентами методов количественного финансового анализа является базой для последующего получения обучающимися практических навыков в сфере расчетов, связанных с любыми видами финансовых операций.

Совокупность методов расчетов, объединенных под общим названием финансовая математика, финансовые и коммерческие расчеты, высшие финансовые вычисления являются предметом данного курса.

В настоящее время финансовая математика – одно из самых динамичных направлений экономической науки, она нацелена на решение широкого круга задач - от элементарного начисления процентов до анализа сложных инвестиционных, кредитных и коммерческих проблем в различных их постановках, зависящих от конкретных условий. К ним, в частности, можно отнести:

- измерение конечных финансовых результатов операции для каждой из участвующих в ней сторон;
- выявление зависимости конечных результатов от основных параметров операции, измерение взаимосвязи этих параметров, определение допустимых граничных значений;
- разработка планов выполнения финансовых операций;
- нахождение параметров эквивалентного (безубыточного) измерения ус-

ловий сделки.

В данных методических указаниях изложены основные темы курса финансовой математики, представлены основные аналитические показатели, термины и понятия, вопросы для обсуждения, приведены примеры решения задач, рекомендуемая литература.

Раздел 1. ОПЕРАЦИИ НАЧИСЛЕНИЯ ПРОЦЕНТОВ

Тема 1. Операции с простыми процентными ставками

1.1. Время как фактор в финансовых расчетах
1.2. Понятие процента, виды процентных ставок
1.3. Наращение по простой процентной ставке
1.4. Погашение задолженности по частям
1.5. Дисконтирование и учет по простым процентным ставкам

1.1. Время как фактор в финансовых расчетах

В основе финансовой математики лежит принцип изменения *ценности* денег во времени. В практических финансовых операциях суммы денег вне зависимости от их назначения или происхождения, так или иначе, но обязательно связываются с конкретными моментами или периодами времени. Фактор времени, особенно в долгосрочных операциях, играет не меньшую, а иногда даже большую роль, чем размеры денежных сумм. Необходимость учета временного фактора вытекает из сущности финансирования и кредитования и выражается в принципе неравноценности денег, относящихся к разным моментам времени. Известный афоризм «время - деньги» как нельзя лучше выражает сущность современного количественного финансового анализа. Понятно, что сто рублей сегодня неравноценны этой же сумме, полученной через год. Поэтому расчет и анализ любой финансовой операции начинаются в первую очередь с приведения всех платежей, осуществленных в различные моменты времени, к одному моменту (в настоящем или в будущем). Только после этого денежные суммы можно сравнивать между собой, складывать и вычитать.

У каждого человека есть свое, индивидуальное предпочтение во времени. Для одних интересы (потребности, желания) сегодняшнего дня по сравнению с будущим выражены сильнее, для других - слабее. При одинаковых доходах и прочих равных условиях первые более склонны к «расточительству», вторые - более бережливы. Индивидуальным предпочтениям во времени очень сложно дать точную количественную оценку, более того, эти предпочтения не являются постоянными характеристиками человека и могут изменяться. Но задача точного измерения индивидуальных предпочтений во времени нами не ставится, поскольку для людей, живущих в обществе, доминирующими являются общественно признанные показатели предпочтения во времени. Они могут сильно расходиться с индивидуальными, тем не менее, человек чаще будет руководствоваться в своей жизни и деятельности общественно признанными показателями.

Важнейшей особенностью учета временного фактора является наличие *риска, обусловленного неопределенностью будущего. Даже если бы не было* предпочтения во времени как такового, оно бы все равно появилось вследствие этого риска. Сто рублей сегодня есть в наличии, возвратит ли их заемщик, к примеру, через год? Гарантировать этого невозможно, отсюда вытекает вторая составляющая «платы за деньги» - плата за риск, за потенциальную возможность потерять их полностью или частично.

Различные методы вычислений обязательно учитывают в качестве одного из важнейших условий время. Учет этого фактора осуществляется с помощью начисления процентов или дисконтирования.

1.2. Понятие процента, виды процентных ставок

Под процентными деньгами или **процентами** понимают абсолютную величину дохода от предоставления денег в долг в любой его форме: выдача ссуды, продажа товара в кредит, помещение денег на депозитный счет, учет векселя, покупка сберегательного сертификата и т.д.

Какой бы вид или происхождение ни имели проценты, это всегда конкретное проявление такой экономической категории, как ссудный процент.

При заключении финансового или кредитного соглашения стороны (кредитор и заемщик) договариваются о размере процентной ставки.

Под **процентной ставкой** понимается относительная величина дохода за фиксированный отрезок времени, то есть отношение дохода к сумме долга за единицу времени (измеряется в процентах).

Временной интервал, к которому приурочена процентная ставка, называется **периодом начисления** (год, полугодие, квартал, месяц).

Проценты согласно договоренности выплачиваются по мере их начисления или присоединяются к основной сумме долга. Процесс увеличения суммы денег в связи с присоединением процента называется **наращением** или ростом этой суммы.

В финансовом анализе процентная ставка применяется как измеритель степени доходности (эффективности) любой финансово-кредитной или хозяйственной деятельности, независимо от того, имел ли место факт выдачи денег в долг и процесс наращения этой суммы.

В общем виде процентная ставка может быть представлена как сумма четырех основных компонент, которые определяют величину i:

$$\mathbf{i=r+f+E_p+g},$$

где **r** – норма процента, отражающая компенсацию кредитору за отказ использовать в других целях предоставленную сумму в течение времени n;

f – так называемый фактор риска, представляющий собой для кредитора компенсацию за неопределенность (риск) неполучения процентов или всей суммы вообще при наступлении срока возврата долга;

$\mathbf{E_p}$ - инфляционная добавка;

g – компенсация, зависящая от продолжительности срока n, на который ссужены деньги, и тем больше, чем длительнее этот срок.

Несколько упрощая для наглядности ситуацию, можно сказать, что проценты представляют собой в определенной степени результат взаимодействия хозяйствующих субъектов на рынке ссудного капитала. Иными словами, процентная ставка – это цена использования денег.

Существуют различные способы начисления процентов, зависящие от условий контрактов. Соответственно, применяют разные виды процентных ставок. Выделяют ряд признаков, по которым различают процентные ставки:

- по базе начисления: простые и сложные проценты;
- по принципу расчета процентов: ставки наращения (декурсивные) и учетные ставки (антисипативные);
- по интервалам начисления: дискретные и непрерывные;
- по степени изменения размера: фиксированные и плавающие.

Важное место в системе процентных ставок занимает ставка рефинансирования Центрального банка России – ставка, по которой ЦБ выдает кредиты *коммерческим банкам.*

При последовательном погашении задолженности возможны два способа начисления процентов. Согласно первому процентная ставка (простая или сложная) применяется к фактической сумме долга. По второму способу простые проценты начисляются сразу на всю сумму долга без учета последовательного его погашения (применяется при открытии потребительских кредитов).

Размер процентной ставки зависит от ряда как объективных, так и субъективных факторов:

- общего состояния экономики, в том числе денежно-кредитного рынка;
- ожидаемой динамики рынка;
- вида сделки;
- валюты сделки;
- срока кредита;
- особенностей деятельности заемщика и кредитора, истории их отношений и т.д.

1.3. Наращение по простой процентной ставке

Под **наращенной суммой** долга понимают первоначальную сумму долга с начисленными процентами к концу срока.

Наращенная сумма определяется умножением первоначальной суммы долга на множитель наращения, который показывает, во сколько раз наращенная сумма больше первоначальной.

Примем следующие обозначения:

I –проценты за весь срок ссуды;

P – *первоначальная сумма долга;*

S – наращенная сумма;

i – ставка наращения;

n – срок ссуды, в годах.

Начисленные за весь срок проценты составляют:

$$I=P*n*i. \tag{1.1}$$

Наращенная сумма (формула простых процентов):

$$S=P+I=P*(1+n*i). \qquad (1.2)$$

Сущность простых процентов заключается в том, что они начисляются на одну и ту же величину капитала в течение всего срока ссуды, т.е. начисление происходит на постоянную базу.

Обычно к наращению по простым процентам прибегают при выдаче краткосрочных ссуд (до 1 года) или в случаях, когда проценты не присоединяются к сумме долга, а периодически выплачиваются кредитору. Поскольку срок ссуды может быть меньше одного года, общий срок n выражают в виде дроби:

$$n=t\,/\,K, \qquad (1.3)$$

где t – число дней ссуды;

K – число дней в году (временная база).

При расчете простых процентов, если K=360, получают обыкновенные или коммерческие проценты, а при использовании действительной продолжительности года (K=365, 366) получают точные проценты.

Число дней ссуды также можно измерять приближенно (любой месяц принимается за 30 дней) и точно (подсчитывается число дней между датой выдачи ссуды и датой его погашения, причем дата выдачи и день погашения считаются за один день). Точное число дней между двумя датами можно определить по таблице 5 приложения.

На практике применяют 3 варианта расчета простых процентов:

а) точные проценты с точным числом дней ссуды - 365/365, АСТ/АСТ;

б) обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды - 365/360, АСТ/360; этот вариант дает несколько больший результат, так как при t>360 сумма начисленного процента будет больше, чем предусмотрено годовой ставкой (t=364, n=364/360=1.011);

в) обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды - 360/360.

Проценты с точным числом дней дают больший рост, так как среднее число дней в месяце за год = 30,58.

Начисление процентов в смежных календарных периодах

Выше при начислении процентов не принималось во внимание расположение срока ссуды относительно календарных периодов. Часто даты начала и окончания ссуды находятся в двух смежных календарных отрезках времени, и начисленные проценты не могут быть целиком отнесены к одному из них. Необходимость деления общей суммы процентов между периодами возникает в бухгалтерском учете при налогообложении, финансовом анализе деятельности предприятия.

Если общий срок ссуды захватывает 2 смежных календарных периода, то

$$I=I_1+I_2=P*n_1*i+P*n_2*i.\qquad(1.4)$$

При переменных ставках наращенная сумма для простых процентов определяется выражением:

$$S=P*(1+n_1*i_1+n_2*i_2+...+n_m*i_m)=P*(1+\Sigma n_t*i_t),\qquad(1.5)$$

где i_t – процентная ставка в периоде t, t=1, 2, …m;
n_t – продолжительность периода t.

На практике при инвестировании средств в краткосрочные депозиты иногда прибегают к неоднократному последовательному повторению наращения в пределах заданного срока, т.е. *реинвестированию* полученных на каждом этапе наращения средств.

Наращенная сумма для всего срока составит:

$$S=P*(1+n_1*i_1)*(1+n_2*i_2)...P*(1+n_k*i_k),\qquad(1.6)$$

где i_k – ставки, по которым производится реинвестирование.

Если периоды начисления и ставки не изменяются во времени, то имеем

$$S=P*(1+n*i)^m,\qquad(1.7)$$

где m – количество реинвестиций.

1.4. Погашение задолженности по частям

Необходимым условием финансовой операции в любой ее форме является сбалансированность вложений и отдачи. Понятие сбалансированности поясним на графике (рис. 1.1).

Пусть ссуда в размере P_0 выдана на срок Т. На протяжении этого срока в счет погашения задолженности производятся платежи R_1 и R_2, а в конце срока выплачивается остаток задолженности – R_3.

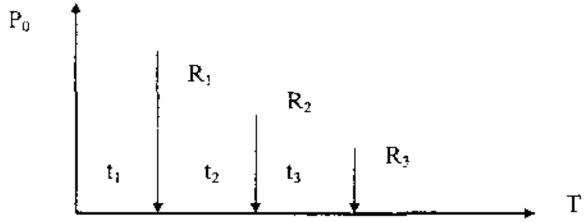

Рис. 1.1. Контур операции

На интервале t_1 задолженность растет, так как начисляются проценты, до величины P_1. В конце этого периода в счет погашения задолженности выплачивается сумма R_1, долг уменьшается до K_1 и так далее. Заканчивается операция получением кредитором в окончательный расчет суммы R_3 и обнулением задолженности.

График на рис. 1.2 называется контуром операции. Сбалансированная операция обязательно имеет замкнутый контур, то есть последняя выплата полностью закрывает остаток задолженности.

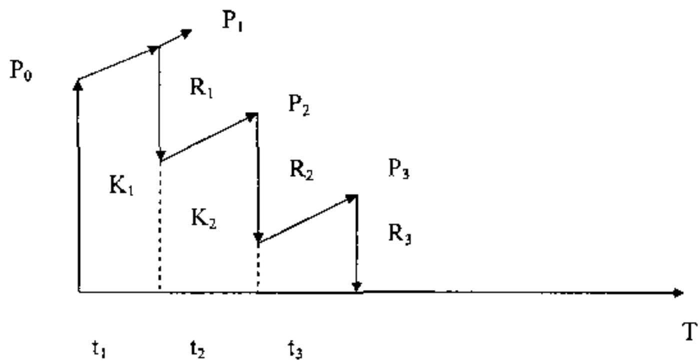

Рис. 1.2. Контур сбалансированной финансовой операции

Краткосрочные обязательства иногда погашаются с помощью последовательности частичных платежей. В этом случае нужно решить вопрос о том, какую сумму надо брать за базу для расчета процентов и как определять остаток задолженности. Существует 2 метода решения этой задачи.

1. Актуарный метод (в основном в операциях больше одного года)

Данный метод предполагает последовательное начисление процентов на фактическую сумму долга. Частичный платеж идет в первую очередь на погашение процентов, начисленных на дату платежа. Если величина платежа превышает сумму начисленного процента, то разница идет на погашение основной суммы долга. Получившийся остаток является базой для начисления процентов за следующий период. Если частичный платеж меньше начисленного процента, то никакие зачеты в сумме долга не делаются, он плюсуется к следующему платежу.

Для нашего графика можно записать:

$$K_1 = P_0 * (1+t_1 * i) - R_1;$$
$$K_2 = K_1 * (1+t_2 * i) - R_2;$$
$$K_3 = K_2 (1+t_3 * i) - R_3. \quad (1.8)$$

Данный метод нарушает принцип начисления простых процентов, так как проценты начисляются не на первоначальную сумму долга, а на остаток задолженности, который может частично содержать ранее начисленные проценты. Этого можно избежать, если на каждом этапе выплачивать только проценты.

2. Правило торговца

Вариант 1. Срок ссуды не более одного года. Сумма долга с начисленными за весь срок процентами остается неизменной до полного погашения. Параллельно идет накопление частичных платежей с начисленными на них до конца срока процентами. Последний взнос должен сбалансировать долг и платежи.

Вариант 2. Срок ссуды больше 1 года. Указанные выше расчеты делаются на год. В конце года из суммы задолженности вычитается наращенная сумма накопленных частичных платежей (из долга с начисленными процентами вычитаются накопленные платежи с начисленными процентами).

Остаток гасится по схеме:

$$O = S - K = P*(1+ ni) - \Sigma R_j(1 + t_j * i_j), \quad (1.9)$$

где O - остаток долга на конец срока или года;

S - наращенная сумма долга;

K - наращенная сумма платежей;

R_j - сумма частичного платежа;

n-общий срок ссуды;

t_j-интервал времени от момента платежа до конца срока ссуды или года.

Данный метод используется коммерческими фирмами в сделках со сроком не более года. Если иное не оговорено, то при начислении процентов в обоих методах используются обыкновенные проценты с приближенным числом дней (360/360). Заметим, что для одних и тех же данных актуарный метод и правило торговца в общем случае дают разные результаты. Остаток задолженности по первому методу немного выше, чем по второму.

1.5. Дисконтирование и учет по простым процентным ставкам

Дисконтирование

В финансовых расчетах возникает необходимость сравнивать между собой различные суммы денег в разные моменты времени. Чтобы сравнить суммы денег во времени, их необходимо привести к единому временному знаменателю. В практике финансовых расчетов принято приводить суммы средств, которые получит инвестор, к сегодняшнему дню, т.е. начальной точке отсчета.

В финансовой практике часто сталкиваются с задачей, обратной задаче наращения. Обратная задача задаче наращения процентов: по заданной сумме S, которую следует уплатить через некоторое время n, необходимо определить сумму полученной ссуды P.

Аналогичная ситуация возникает при разработке условий контракта или же в ситуации, когда проценты с суммы S удерживаются вперед, т.е. непосредственно при выдаче ссуды.

В этом случае говорят, что S дисконтируется или учитывается, а сам процесс начисления и удержания процентов называется учетом, а удержанные проценты - дисконтом. Необходимость дисконта возникает при покупке каких–либо обязательств, оплата которых должником произойдет в будущем.

В более широком смысле термин «дисконтирование» используется для определения любой стоимостной величины, относящейся к будущему, на некоторый более ранний момент времени t.

Такой прием называется приведением стоимостного показателя к некоторому моменту t.

Величину P, найденную с помощью дисконтирования, называют современной величиной суммы S, иногда – современной (текущей, капитализированной) стоимостью.

В зависимости от вида процентной ставки применяют два метода дисконтирования:

- банковский (коммерческий) учет по учетной ставке;
- математическое дисконтирование.

Математическое дисконтирование - формальное решение задачи, обратной наращению первоначальной суммы ссуды (какую первоначальную сумму ссуды надо выдать, чтобы получить в конце срока сумму S при условии начисления на долг процента по ставке i).

$$P = \frac{S}{(1+ni)}. \qquad (1.10)$$

Величина Р является современной величиной суммы S, которая будет выплачена спустя n лет.

Дробь $\frac{1}{(1+ni)}$ – дисконтный множитель, показывающий, какую долю составляет первоначальная величина долга в его окончательной сумме.

Разность *S-P* - это не только проценты, начисленные на первоначальную сумму, но и дисконт с суммы S.

$$D = S - P. \qquad (1.11)$$

Дисконт может быть установлен по соглашению сторон, через процентную ставку, или в виде абсолютной величины для всего срока.

Банковский учет (учет векселей)

Сущность операции заключается в следующем.

Банк до наступления срока платежа по векселю или иному обязательству приобретает его у владельца по цене, которая меньше суммы, указанной в векселе, т.е. покупает (учитывает) его с дисконтом (со скидкой). Получив при наступлении срока платежи по векселю, банк реализует дисконт. Владельцу же векселя с помощью его учета предоставляется возможность получить деньги хотя и не в полном объеме, однако раньше указанного в векселе срока.

Вексель – ценная бумага, особый вид письменного долгового обязательства, составляется в предписанной законом форме и дает его владельцу бесспорное право требовать по истечении определенного срока, указанного в векселе, с лица, выдавшего обязательство, уплаты обозначенного в нем денежного долга.

При учете векселей применяется метод, согласно которому процент за пользование ссудой в виде дисконта начисляется на сумму, подлежащую уплате в конце срока. При этом применяется учетная ставка d.

Размер дисконта D (сумма учета) равен:

$$D = S*n*d. \qquad (1.12)$$

Тогда

$$P = S - D = S - S*n*d = S(1 - n*d), \qquad (1.13)$$

где n - срок от момента учета до срока погашения векселя.

Учет по учетной ставке чаще всего осуществляется при К=360, а число дней ссуды берется точным: АСТ/360.

Даже при $i=d$ оба метода дают разные результаты. Учетная ставка d отражает фактор времени более жестко: при $n>1/d$ величина дисконтного множителя и значение P становится отрицательным, т.е. при относительно большом сроке векселя его учет может привести к $P=0$ или $P<0$, что лишено смысла.

Математическое дисконтирование фактор времени учитывает более мягко (корректно). При любых значениях n и i значение $P>0$. Сравнивая зависимости для S, можно сказать, что учетная ставка дает более высокий темп роста суммы задолженности.

Выбор конкретного вида процентной ставки заметно влияет на финансовые итоги операции.

Часто при решении задач финансового характера возникает необходимость в определении срока ссуды и размера процентной ставки при прочих заданных условиях. Необходимые зависимости можно получить из базовой формулы наращения по простым процентам.

Основные термины и понятия:

Ссудный процент	Точные проценты
Учетная ставка	База начисления
Процентная ставка	Обыкновенные проценты
Период начисления	Реинвестирование
Наращение суммы долга	Актуарный метод
Дисконтирование	Правило торговца
	Современная стоимость

Вопросы для обсуждения:

1. Дайте расширенное определение такой экономической категории, как «ссудный процент».
2. Какие факторы могут оказывать влияние на размер процентных ставок?
3. Виды процентных ставок.
4. Какие факторы следует учитывать при наращении процентов по простой процентной ставке?
5. Как можно измерить длительность ссуды? В чем разница между точными и обыкновенными процентами?
6. Объясните на примере процесс реинвестирования.
7. Объясните сущность актуарного метода при погашении задолженности по частям. Чем данный метод отличается от правила торговца?
8. В чем заключается сущность математического дисконтирования? Чем отличается наращение процентов от дисконтирования?
9. Какой тип наращения предпочтителен при хранении денег в банке?
10. Вы располагаете данными о сумме, которую сможете получить через 5 лет, и хотите продать этот контракт немедленно. Какими расчетными формулами целесообразно воспользоваться покупателю и почему?

Примеры решения задач:

1. Ссуда 10 тыс. руб. выдана 15.06.05 г. сроком на два месяца.

Определить размер выплаченных заемщиком процентов по схеме АСТ/АСТ *при следующих процентных ставках: июнь – 15%; июль – 16%; ав*густ – 17% годовых.

Решение: при переменных ставках наращенная сумма для простых процентов определяется выражением (1.5):

$S=P*(1 + n_1*i_1 + n_2*i_2+...+n_m*i_m) =P*(1 + \Sigma n_t*i_t)$,

поскольку проценты точные (АСТ/АСТ), необходимо рассчитать точное число дней ссуды в каждом месяце, не забывая, что день выдачи и день погашения берется за один день:

$$S=10000(1+\frac{16}{365}*0,15)(1+\frac{31}{365}*0,16)(1+\frac{15}{365}*0,17)\quad 10282 \text{ руб.}$$

Сумма полученных процентов определяется как разность между наращенной суммой и первоначальной: I=282 руб.

2. Сумма в 50 тыс. руб. размещена на трехмесячном депозите под 18% годовых. Полученные средства по окончании депозитного договора были реинвестированы на тех же условиях. Определить величину полученных инвестором процентов в результате данной операции.

Решение: если периоды начисления и ставки не изменяются во времени, то можно воспользоваться формулой (1.7):

$$S=P*(1+n*i)^m$$

$$S=50000*(1+\frac{3}{12}*0,18)^2=54601,25 \text{ руб.}$$

$I=4601,25$ *руб.*

(если в условии задачи не указан вариант начисления процентов, то применяются обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды).

3. Разработать график погашения ссуды в 150 тыс. руб., выданной сроком на 10 месяцев под 22% годовых. Количество платежей в графике погашения не менее двух и не более четырех. Схема 360/360. Расчет провести актуарным методом и правилом торговца.

Решение: актуарный метод предполагает последовательное начисление процентов на фактические суммы долга, поскольку размеры периодических платежей не указаны, график погашения разрабатываем самостоятельно (сроки выплат и размеры платежей определяются самостоятельно в рамках условия задачи; для того, чтобы сверить результаты по двум методам, размеры выплат и сроки погашения берем одинаковыми):

$K_1= P_0* (1+t_1*i) – R_1,\qquad 150000(1+\frac{3}{12}*0,22)-58250=100000$ *руб.;*

$K_2= K_1* (1+t_2*i) – R_2,\qquad 100000(1+\frac{4}{12}*0,22)-57333=50000$ *руб.;*

$K_3 = K_2(1+t_3*i) - R_3$, $\qquad 50000(1+\frac{3}{12}*0,22)-52750=0.$

Если операция имеет сбалансированный контур, то последний платеж обнуляет задолженность ($K_3=0$); согласно правилу торговца сумма долга с процентами остается неизменной до полного погашения, из которой в конце операции вычитаются частичные платежи с накопленными на них до конца срока процентами:

$O=S - K = P*(1 + ni) - \Sigma R_j(1+t_j*i_j),$

$150000(1+\frac{10}{12}*0,22)=177500$ руб.;

1) $58250(1+\frac{7}{12}*0,22)=65725$ руб.;

2) $57333(1+\frac{3}{12}*0,22)=60486$ руб.;

3) $177500-65725-60486-51289=0.$

Итак, остаток долга на конец срока при применении актуарного метода составит – 52750 руб., при использовании правила торговца – 51289 руб.; остаток задолженности по первому методу выше на 1461 руб., т.е. для одних и тех же данных актуарный метод дает больший результат.

4. Определить размер реализованного банком дисконта при погашении эмитентом долгового обязательства в 100 тыс. руб. 25.08.05г. Данное обязательство учитывается банком 23.07.05г. по учетной ставке 15% годовых (ACT/360).

Решение: учетная ставка применяется при банковском дисконтировании, количество дней операции необходимо рассчитать точно, для этого можно воспользоваться таблицей порядковых номеров дней в году, по которой определяется продолжительность финансовой операции вычитанием номера первого дня операции из номера последнего дня операции (таблица 5 приложения):

$D=S*n*d; \qquad 100000*\frac{33}{360}*0,15=1375$ руб.

5. Определить сумму начального взноса на депозит длительностью 9 месяцев, если по завершении депозитного договора инвестором было получено 11500 руб., при ставке 15% годовых, (360/360).

Решение: речь идет о математическом дисконтировании, т.е. операции, обратной наращению, проценты обыкновенные:

$P=\frac{S}{(1+ni)}; \qquad \frac{11500}{(1+\frac{9}{12}*0,15)}=10337$ руб.

Тема 2. Сложные проценты

2.1. Начисление сложных годовых процентов

В средне- и долгосрочных финансовых операциях при присоединении процентов к основной сумме долга используются сложные проценты. База для начисления сложных процентов непостоянна и увеличивается во времени, абсолютная сумма процентов растет, а процесс наращения по сложным процентам ускоряется. Это похоже на процесс рефинансирования.

Наращенная сумма для сложных процентов:

$$S=P(1+i)^n. \tag{2.1}$$

Проценты за этот период:

$$I=S-P=P[(1+i)^n-1] . \tag{2.2}$$

Присоединение начисленных процентов к сумме, которая является базой, называется **капитализацией** процентов.

При большом сроке наращения даже небольшое изменение ставки заметно влияет на величину множителя наращения. В свою очередь, очень большой срок приводит к устрашающим результатам даже при небольшой процентной ставке. Например, остров Манхеттен, на котором расположена центральная часть Нью-Йорка, был куплен, а точнее выменян у индейского вождя в 1624 году за 24 $. Стоимость земли этого острова 350 лет спустя оценивалась примерно в 40 млрд. $. Такой рост достигается при ставке всего 6,3 % годовых.

Неустойчивость кредитно–денежного рынка заставляет модернизировать «классическую» схему (постоянную ставку) с помощью применения переменных ставок. Для случая использования разных ставок в различных смежных периодах базовую зависимость можно записать так:

$$S = P(1+i_1)^{n1}(1+i_2)^{n2}...(1+i_k)^{nk}. \tag{2.3}$$

При начислении процентов за дробное число лет более эффективна смешанная схема, предусматривающая начисление сложных процентов за целое число лет и простых процентов за дробную часть года.

$$S = P(1+i)^a(1+bi), \qquad a+b = n, \tag{2.4}$$

где a – целое число периодов;

b - дробная часть периода.

Рост по сложным и простым процентам. Для того, чтобы сопоставить результаты наращения по разным процентным ставкам, достаточно сравнить соответствующие множители наращения. Для простых процентов введем нижний индекс «s».

Для $n < 1$ имеем: $(1+ ni_s) > (1+i)^n$;
Для $n > 1$: $(1+ni_s) < (1+i)^n$;
$n = 1$: $(1+ni_s) = (1+i)^n$.

С увеличением «n» разница между $(1+ni_s)$ и $(1+i)^n$ существенно растет вследствие применения простых и сложных процентов.

Различия наглядно проявляются при определении срока, за который происходит увеличение первоначальной суммы в N раз, т.е. когда множитель наращения становится равным N.

Простые проценты: $1+ ni_s = N$, следовательно:

$$n = \frac{N-1}{i_s} \qquad (2.5)$$

Сложные проценты: $(1+i)^n = N$, следовательно:

$$n = \ln N/\ln(1+i). \qquad (2.6)$$

Для случая удвоения исходной суммы имеем:

- простые проценты:

$$n = 1/i_s\,, \qquad (2.7)$$

- сложные проценты:

$$n = \ln 2/\ln(1+i). \qquad (2.8)$$

2.2. Номинальная и эффективная ставки

В современных условиях проценты капитализируются обычно не один, а несколько раз в году – по полугодиям, кварталам (некоторые зарубежные банки практикуют ежедневное начисление процентов). На практике в контрактах фиксируется не ставка за период, а годовая ставка и одновременно указывается период начисления процентов (например, 20% годовых с полугодовым начислением процентов).

Номинальная ставка

При многократном начислении процентов на начальную сумму надо учитывать как ставку процентов в соответствующем периоде, так и размер этого периода.

В контрактах обычно указывается годовая ставка и количество начислений в году. *Эту ставку называют* ***номинальной*** *– j, а в „m" – периоде начисляется* j/m процентов.

Наращенная сумма по номинальной ставке:

$$S = P(1+ j/m)^N, \tag{2.9}$$

где N – общее число периодов: N = m*n.

Номинальная ставка определяется по формуле:

$$j = m*(\sqrt[mn]{\frac{S}{P}}-1). \tag{2.10}$$

Более частое начисление сложных процентов обеспечивает более быстрый рост наращиваемой суммы.

Эффективная ставка

Эффективная ставка (действительная) – ставка, которая измеряет реальный относительный доход, который получают в целом за год от начисления процентов.

Другими словами – это годовая ставка сложных процентов, которая дает тот же результат, что и „m" – разовое начисление процентов по ставке j/m.

Пусть эффективная ставка - $i_{эф}$, тогда:

$$(1+ i_{эф})^n = (1+ j/m)^{nm} \quad — \quad i_{эф} = (1+ j/m)^m - 1. \tag{2.11}$$

Таким образом, при m > 1 эффективная ставка больше номинальной, при m = 1, $i_{эф}$ = j.

Замена в договоре номинальной ставки j при „m" – разовом начислении процентов на эффективную ставку i не изменяет финансовых обязательств сторон, т.е. обе ставки эквивалентны в финансовом отношении. В том случае, если надо определить j при заданных $i_{эф}$ и m, используется формула:

$$j = m*(\sqrt[m]{1+i_{эф}}-1). \tag{2.12}$$

Эффективная процентная ставка позволяет сравнивать финансовые операции с различной частотой начисления и неодинаковыми процентными ставками.

2.3. Дисконтирование по сложной ставке процентов

В финансовых операциях с использованием сложных ставок в качестве коэффициента дисконтирования может использоваться либо процентная ставка (математическое дисконтирование), либо учетная ставка (банковское дисконтирование).

Математическое дисконтирование по сложной ставке:

$$P = S / (1+i)^n . \qquad (2.13)$$

Величину $v = \frac{1}{(1+i)^n}$ называют дисконтным множителем.

Для случая начисления процентов „m“ раз в году:

$$P = S / (1 + j/m)^{nm}. \qquad (2.14)$$

Величину **P** называют современной величиной или современной стоимостью величины S.

Величина **S** может быть рассчитана на любой момент времени до выплаты **S**. Разность **S** – **P**, если **P** определено дисконтированием, называют дисконтом **D:**

$$D = S - P. \qquad (2.15)$$

Современная стоимость денег – одна из ключевых характеристик, применяемых в финансовом анализе. Чем выше ставка процента, тем сильнее дисконтирование при прочих равных условиях. С увеличением срока при прочих равных условиях современная стоимость уменьшается.

2.4. Операции со сложной учетной ставкой

Учет по сложной учетной ставке. При использовании сложной учетной ставки процесс дисконтирования замедляется, т.к. каждый раз эта ставка применяется не к первоначальной сумме (как при простой учетной ставке), а к сумме, уже продисконтированной на предыдущем временном интервале. Дисконтирование по сложной учетной ставке осуществляется по формуле:

$$P = S\,(1-d)^n, \qquad (2.16)$$

$$d = 1 - \sqrt[n]{\frac{P}{S}} . \qquad (2.17)$$

где d – сложная годовая учетная ставка.

Надо отметить, что дисконтирование по сложной учетной ставке выгоднее для должника, чем дисконтирование по простой учетной ставке.

Номинальная и эффективная учетные ставки

По аналогии с номинальной и эффективной ставкой процентов введем понятия «номинальная» и «эффективная» учетная ставка.

Номинальная учетная ставка – f:

$$f = m\,(1 - \sqrt[mn]{\frac{P}{S}}). \qquad (2.18)$$

Если дисконтирование производится «m» раз в году, то

$$P = S\,(1 - f/m)^{mn}. \qquad (2.19)$$

Эффективная учетная ставка характеризует результат дисконтирования за год. Она равна:

$$(1-d)^n = (1-f/m)^{mn}, \text{ следовательно, } d = 1-(1-f/m)^m. \qquad (2.20)$$

Эффективная учетная ставка во всех случаях, когда $m>1$, меньше номинальной.

Наращение по сложной учетной ставке. Иногда наращение осуществляется и с помощью сложной учетной ставки, когда возникает необходимость в определении суммы, которую следует проставить в векселе, если известна текущая сумма долга:

$$S = P/(1-d)^{n}, \qquad (2.21)$$

$$S = P/(1-f/m)^{mn}. \qquad (2.22)$$

Основные термины и понятия:

Сложные проценты

Номинальная ставка

Эффективная ставка

Капитализация процентов

Учетная номинальная ставка

Учетная эффективная ставка

Вопросы для обсуждения:

1. Какая схема более выгодна при начислении процентов за дробное число лет? Почему?
2. Что такое номинальная ставка, чем она отличается от эффективной ставки? Приведите примеры использования данных ставок.
3. Почему дисконтирование по сложной учетной ставке выгоднее для должника, чем дисконтирование по простой учетной ставке?
4. Дайте определение понятию «современная стоимость». Как данная категория применяется в финансовой математике?

5. С какой целью осуществляется сопоставление множителей наращения и дисконтных множителей?

6. В чем состоит принципиальная разница между простыми и сложными процентами?

7. Для чего осуществляется наращение по сложным учетным ставкам?

8. Проведите сравнительный анализ графиков изменения наращения капитала при реализации схем простых и сложных процентов.

Примеры решения задач:

1. Кредит в размере 30 тыс. руб. выдан на 21 месяц под 19% годовых. Определить общую сумму долга на момент погашения кредита.

Решение: возможны два варианта решения задачи:

1) $S=P(1+i)^n$; $30000*(1+0,19)^{1,75}=40675$ *руб.;*

2) $S = P(1+i)^a(1+bi)$; $30000*(1+0,19)^1(1+\frac{9}{12}*0,19)=40787$ *руб.*

Множитель наращения по смешанному методу несколько больше, чем по общему, т.к. для срока меньше года простые проценты больше сложных.

2. За какой срок в годах произойдет увеличение первоначальной суммы размером 15 тыс. руб. до 45 тыс. руб., при ставке 18% годовых?

Решение: $n = \ln N/\ln(1+i)$; $N=45/15$; $\ln 3/\ln 1,18$ 5 *лет.*

3. При погашении кредита заемщик через три года выплатил 64 тыс. руб. Необходимо определить начальную сумму кредита, если проценты начислялись каждые шесть месяцев по номинальной ставке 16% годовых.

Решение: для определения первоначальной суммы долга необходимо провести операцию дисконтирования: из формулы $S = P(1+ j/m)^N$ *находим размер первоначального долга:*

$P= S/ (1+ j/m)^N$, $64000/(1+0,16/2)^{2*3}=40332$ *руб.;*

(количество начислений процентов - $m=2$*, если проценты начисляются раз в полгода;* $m=4$*, если проценты начисляются раз в квартал, и т.д.).*

4. Долговое обязательство на сумму 5 млн. руб., срок оплаты которого наступает через 5 лет, продано с дисконтом по сложной учетной ставке 15% годовых. Каков размер полученной за долг суммы и величина дисконта?

Решение: поскольку речь идет об учетной ставке, то имеет место банковское дисконтирование, владелец обязательства получит:

$P = S(1-d)^n$, $5000000(1-0,15)^5=2218526$ *руб.;*

дисконт, который получит банк при учете данного обязательства, равен: $D = S - P$, $5000000- 2218526=2781474$ *руб.*

5. Сберегательный сертификат приобретен за 5 тыс. руб. Данный сертификат погашается через 2 года по номинальной стоимости в 12 тыс. руб. Определить уровень доходности финансовой операции.

Решение: доходность любой операции – это некоторая процентная ставка, по которой происходит наращение или дисконтирование; в данном случае необходимо определить годовую ставку сложных процентов, которую находим из базовой формулы наращения по сложным процентам:

$$i = \left(\sqrt[n]{\frac{S}{P}} - 1\right), \qquad \left(\sqrt[2]{\frac{12000}{5000}} - 1\right) = 0{,}55 * 100\% = 55\%;$$

(правильность расчета можно проверить, если подставить полученное значение в формулу наращения).

Тема 3. Производные процентные расчеты. Кривые доходности

3.1. Финансовая эквивалентность обязательств
3.2. Консолидирование задолженности
3.3. Эквивалентность процентных ставок
3.4. Средние процентные ставки
3.5. Кривые доходности
3.6. Влияние налогов и инфляции на наращение процентов

3.1. Финансовая эквивалентность обязательств

На практике нередко возникают случаи, когда необходимо заменить одно *денежное обязательство другим, например, изменился срок контракта. Финан*совая эквивалентность обязательств предполагает неизменность финансовых отношений сторон до и после изменения контракта (замена одного обязательства другим, отсрочка платежа). При этом эквивалентными считаются платежи, которые, будучи приведенными к одному моменту времени, оказываются равными. *Приведение осуществляется путем дисконтирования или наращения* суммы платежа (если эта дата относится к будущему). Если при изменении условий контракта принцип финансовой эквивалентности не соблюдается, то один из участников договора несет убытки.

Принцип эквивалентности следует из формул наращения и дисконтирования, связывающих величины P и S. Сумма P эквивалентна S при принятой процентной ставке и методе ее начисления. Две суммы денег S_1 *и* S_2, выплачиваемые в разные моменты времени, считаются эквивалентными, если их современные или наращенные величины, рассчитанные по одной процентной ставке на один момент времени, одинаковы.

Из сказанного следует, что сравнение платежей предполагает использование некоторой процентной ставки, от выбора величины которой зависит результат. Процентная ставка, по которой происходит сравнение, называется *критической* или *барьерной* ставкой. Величину такой ставки можно определить на основе равенства современных стоимостей сравниваемых платежей.

Для простых процентов:

$$i_0=\frac{1-\frac{S_1}{S_2}}{\frac{S_1}{S_2}*n_2-n_1}. \qquad (3.1)$$

Из формулы следует, что чем больше различие в сроках, тем больше величина $\mathbf{i_0}$ при прочих равных условиях. Рост отношения $\mathbf{S_1/S_2}$ оказывает противоположное влияние.

Для сложных процентов:

$$i_0=\sqrt[n2-n1]{\frac{S_2}{S_1}}-1. \qquad (3.2)$$

3.2. Консолидирование задолженности

Одним из распространенных случаев изменения условий является консолидация или объединение платежей. В данном случае несколько платежей с разными сроками заменяются одной суммой, выплачиваемой в определенный срок. Возможно решение двух задач: известна сумма консолидированного платежа, необходимо определить срок; задан срок – рассчитывается сумма платежа.

При решении задачи определения суммы консолидированного платежа искомую величину находят как сумму наращенных и дисконтированных платежей.

Для простых процентов: при $\mathbf{n_1<n_2<\ldots<n_m}$ и $\mathbf{n_1<n_0<n_m}$:

$$S_0=\sum S_j*(1+t_ji)+\sum S_k*(1+t_ki)^{-1}, \qquad (3.3)$$

где $\mathbf{S_j}$ – размеры объединяемых платежей со сроками $n_j<n_0$;

$\mathbf{S_k}$ – размеры платежей со сроками $n_k>n_0$;

$\mathbf{S_0}$ – сумма консолидированного платежа;

$\mathbf{n_0}$ – срок консолидированного платежа;

$\mathbf{t_j=n_0-n_j}$, $\mathbf{t_k=n_k-n_0}$,

в частном случае, при $\mathbf{n_0>n_m}$:

$$S_0=\sum S_j*(1+t_ji). \qquad (3.4)$$

Для сложных процентов: $\mathbf{n_1<n_0<n_m}$:

$$S_0=\sum S_j*(1+i)^{tj}+\sum S_k*(1+i)^{-tk}. \qquad (3.5)$$

Если при объединении платежей задана величина консолидированного платежа, то возникает проблема определения его срока. Из уравнения эквивалентности современных стоимостей соответствующих платежей получим - для простых процентов:

$$n_0=\frac{1}{i}\left(\frac{S_0}{\sum S_j(1+n_j i)^{-1}}-1\right), \tag{3.6}$$

при этом размер заменяющего платежа должен быть больше суммы современных стоимостей заменяемых платежей, т.е. $S_0>\Sigma S_j*(1+n_j i)^{-1}$; искомый срок также пропорционален величине консолидированного платежа;

для сложных процентов:

$$n_0=\frac{\ln\left(\frac{S_0}{\sum S_j(1+i)^{-n_j}}\right)}{\ln(1+i)}, \tag{3.7}$$

для частного случая, если $S_0=\Sigma S_j$, то

$$n_0=(\Sigma S_j*n_j)/S_0, \tag{3.8}$$

данная формула не требует задания процентной ставки и дает приближенный результат, который больше точного; при этом чем выше ставка **i**, тем больше погрешность решения.

3.3. Эквивалентность процентных ставок

Понятие эквивалентности может использоваться и применительно к процентным ставкам. Эквивалентные процентные ставки – ставки, значения которых в конкретных условиях приводят к одинаковым финансовым результатам (например, эффективная ставка **i** и номинальная ставка **j**).

Формулы эквивалентности ставок во всех случаях получают из равенства взятых попарно множителей наращения.

Эквивалентность простых процентных ставок

При выводе соотношений между ставкой наращения и учетной ставкой следует иметь в виду, что при их применении используются временные базы K=360 или K=365 дней. Если временные базы одинаковы, то:

$$i_s=d_s/(1-nd_s), \tag{3.9}$$

$$d_s = i_s/(1+n\, i_s), \qquad (3.10)$$

при этом для одинаковых условий операции – d < $\mathbf{i_s}$.

Если срок ссуды измеряется в днях (n=t/K):
а) временные базы одинаковы и равны 360 дням:

$$i_s = 360/(360-td_s), \qquad (3.11)$$

$$d_s = (360\, i_s)/(360+t\, i_s). \qquad (3.12)$$

б) если принята база K=365 дней для ставки i_s, а для учетной ставки K=360:

$$i_s = (365 d_s)/(360-td_s), \qquad (3.13)$$

$$d = (360\, i_s)/(365+t\, i_s). \qquad (3.14)$$

Эквивалентность простых и сложных процентных ставок

$$i_s = \frac{(1+i)^n - 1}{n}, \qquad (3.15)$$

$$i = \sqrt[n]{1+n * i_s} - 1. \qquad (3.16)$$

Эквивалентность простой ставки и сложной номинальной ставки:

$$i_s = \frac{(1+j/m)^{mn} - 1}{n}, \qquad (3.17)$$

$$j = m * (\sqrt[mn]{1+n * i_s} - 1). \qquad (3.18)$$

Эквивалентность простой учетной ставки и сложной ставки:

$$d_s = \frac{1-(1+i)^n}{n}, \qquad (3.19)$$

$$i = \sqrt[n]{1-nd_s} - 1. \qquad (3.20)$$

Эквивалентность простой учетной ставки и сложной номинальной ставки:

$$d_s = \frac{1-(1+j/m)^{mn}}{n}, \qquad (3.21)$$

$$j = m * (\sqrt[mn]{1-nd_s} - 1). \qquad (3.22)$$

Эквивалентность сложных процентных ставок

Эквивалентность номинальной и эффективной ставок:

$$i = (1 + j / m)^m - 1, \tag{3.23}$$

$$j = m * (\sqrt[m]{1+i} - 1). \tag{3.24}$$

Эквивалентность учетной ставки и ставки наращения:

$$i = d_c / (1 - d_c), \tag{3.25}$$

$$d_c = i / (1 + i). \tag{3.26}$$

3.4. Средние процентные ставки

Если речь идет об одной финансовой операции, в которой размер ставки изменяется во времени, то все значения ставки можно обобщить с помощью средней ставки. При этом результаты наращения или дисконтирования не должны изменяться. Основные зависимости получают приравниванием множителей за общий срок наращения и множителей наращения за определенные периоды.

Простые проценты:

- простая средняя ставка

$$\bar{i} = \frac{\sum n_t * i_t}{N}, \tag{3.27}$$

где $N = \sum n_t$ – *общий срок наращения.*

Приведенная формула представляет собой арифметическую среднюю взвешенную с весами, равными продолжительности отдельных периодов.

- средняя учетная ставка

$$\bar{d} = \frac{\sum n_t * d_t}{N}. \tag{3.28}$$

Сложные проценты:

$$\bar{i} = \sqrt[N]{(1+i_1)^{n1} * (1+i_2)^{n2} \ldots} - 1. \tag{3.29}$$

Средняя в этом случае вычисляется как взвешенная средняя геометрическая.

Теперь рассмотрим усреднение ставок, применяемых в нескольких однородных операциях, которые различаются суммой долга P_t и ставкой процента i_t. Искомые средние ставки находятся из условия равенства соответствующих сумм после наращения процентов. Если применяются простые ставки и сроки этих операций одинаковы:

$$\bar{i} = \frac{\sum P_t * i_t}{\sum P_t}, \tag{3.30}$$

ставка определяется как средняя взвешенная арифметическая, размеры ссуд берутся в качестве весов.

Усреднение сложных ставок для аналогичных условий достигается с помощью взвешенной степенной средней:

$$\bar{i} = \sqrt[n]{\frac{\sum P_t(1+i_t)^n}{\sum P_t}} - 1. \tag{3.31}$$

В практике нередко возникают случаи, когда необходимо изменить условия контракта, практическое применение приведенных зависимостей позволит сделать это, не ущемляя интересов сторон.

3.5. Кривые доходности

Любая ссудная или кредитная операция предполагает использование некоторого значения процентной ставки, с которым согласились обе стороны, участвующие в операции. *Как уже говорилось выше, значение ставки зависит* от многих факторов. Для практика важно представить себе закономерность изменения размера ставок, используемых в однородных по содержанию операциях, в зависимости от какого–либо фундаментального фактора. Вероятно, наиболее важным из факторов является риск невозврата ссуды. Очевидно, что подобного рода риск зависит от ряда факторов, среди которых очень важным является срок операции. Так, при всех прочих равных условиях ссуда на пять лет более рискованна, чем, скажем, на два года. Компенсировать риск владельцу денег может повышение доходности. Т.о., зависимость «доходность - риск» приближенно можно охарактеризовать с помощью зависимости «доходность - срок», получить которую для практических целей существенно проще. Такую зависимость, представленную в виде графика, называют «кривой доходности». На графике по вертикали откладывают доходность (Y), по горизонтали – срок (n), рис. 3.1. Если график охватывает широкий диапазон сроков (как краткосрочные, так и долгосрочные операции), то для измерения срока применяют логарифмическую шкалу.

Наблюдаемые значения доходности обычно находятся около кривой или непосредственно на ней.

Итак, **кривая доходности** характеризует изменение доходности однородных кредитно–ссудных операций или финансовых инструментов (например, долгосрочных облигаций, акций компаний и т.д.) в зависимости от их срока. Конкретная кривая доходности отвечает реальной ситуации, сложившейся на денежно–кредитном рынке, и характерна для короткого временного периода. Изменение ситуации меняет форму кривой и ее положение на графике.

Для нормальных экономических условий кривая доходности имеет форму *кривой А на рис. 3.1. Доходность растет по мере увеличения срока инвестиций.* Причем каждая следующая единица прироста срока дает все меньшее увеличение доходности.

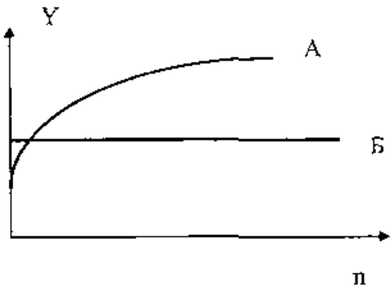

Рис. 3.1. Кривые доходности

Такую кривую называют *положительной*, или *нормальной*, кривой доходности. Нормальная форма кривой наблюдается в условиях, когда инвесторы в своей массе учитывают такие факторы, как сокращение степени ликвидности и рост неопределенности финансовых результатов при увеличении срока.

Кривая доходности, близкая к горизонтальной прямой (кривая Б на рис. 3.1), указывает на то, что инвесторы не принимают во внимание или в малой степени учитывают риск, связанный со сроком.

Иногда встречаются «отрицательные» и «сгорбленные» кривые доходности. Первая соответствует уменьшению доходности по мере увеличения срока (нестабильность финансового рынка), вторая – падению доходности после периода некоторого ее роста.

Существуют две конкурирующие (а иногда дополняющие) теории, объясняющие «поведение» доходности – *теория ликвидности и теория ожиданий*. Первая изменение доходности связывает с увеличением риска ликвидности по мере увеличения срока. Именно с этой позиции объясняются выше положительная и горизонтальная кривые доходности. Согласно второй теории утверждается, что форма кривой может рассматриваться и как обобщенная характеристика ожиданий инвесторов, вернее, их поведения в текущий момент в связи с ожиданиями изменений процентных ставок в будущем. Однако интерпретация формы кривой в этом плане неоднозначна, да и не может быть иной, поскольку приходится принимать во внимание, по крайней мере, действие двух факторов – риска и ожидания изменения ставок. Например, положительная кривая иногда может интерпретироваться как указание на то, что инвесторы ожидают рост ставок в будущем. Однако чаще эта же форма кривой считается симптомом относительной стабильности денежно–кредитного рынка.

Кривые доходности получили широкое распространение как инструмент, помогающий при решении ряда инвестиционных проблем. В частности, при сравнении доходности разных финансовых инструментов (совмещение на одном графике нескольких кривых доходности), корректировке портфеля активов и т.д.

3.6. Влияние налогов и инфляции на наращение процентов

В рассмотренных выше методах определения наращенной суммы не учитывались такие важные моменты, как налоги и инфляция.

Налог на полученные проценты. В ряде стран полученные (юридическими, а иногда и физическими лицами) проценты облагаются налогом, что, естественно, уменьшает реальную наращенную сумму. Нельзя не учитывать и то, что частый пересмотр налоговых правил вносит существенный элемент неопределенности в конечные результаты наращения для владельца денег.

Обозначим, как и выше, наращенную сумму до выплаты налогов через S, а с учетом выплаты как S''. Пусть ставка налога на проценты равна g.

При начислении простых процентов находим:

$$S'' = S - (S-P)\,g = S(1-g) + Pg = P[1 + n(1-g)i]. \qquad (3.32)$$

Таким образом, учет налога сводится к соответствующему сокращению процентной ставки: вместо ставки i фактически применяется ставка (1-g)i.

В долгосрочных операциях при начислении налога на сложные проценты возможны следующие варианты: налог начисляется за весь срок сразу, т.е. на всю сумму процентов, или последовательно, например, в конце каждого года. В первом случае сумма налога равна:

$$P[(1+i)^n - 1]g, \qquad (3.33)$$

а наращенная сумма после выплаты долга

$$S'' = S - (S-P)\,g = S(1-g) + Pg = P[(1-g)(1+i)^n + g]. \qquad (3.34)$$

Во втором случае сумма налога определяется за каждый истекший год. Очевидно, что она является переменной величиной, так как сумма процентов увеличивается во времени. Соответственно увеличивается и годовая сумма налогов. Сумма налогов за весь срок, очевидно, не зависит от метода начисления.

Налог за год t (обозначим его как G_t) можно найти с помощью следующего выражения:

$$G_t = I_t g = (S_t - S_{t-1})g = P[(1+i)^t - (1+i)^{t-1}]g. \qquad (3.35)$$

Инфляция. В рассмотренных выше методах наращения все денежные величины измерялись по номиналу. Иначе говоря, не принималось во внимание снижение реальной покупательской способности денег за период, охватываемый финансовой операцией. Однако в современных, особенно российских, условиях инфляция часто играет решающую роль, и без ее учета конечные результаты представляют собой весьма и весьма условную величину.

Инфляцию необходимо учитывать, по крайней мере, в двух случаях: при расчете наращенной суммы денег и при измерении реальной эффективности (доходности) финансовой операции. Остановимся на этих проблемах.

Прежде всего напомним, что изменение покупательской способности денег за некоторый период измеряется с помощью соответствующего индекса $J_{пс}$. Пусть S – наращенная сумма денег, измеренная по номиналу. Эта же сумма, но *с учетом ее обесценения, составит:*

$$C = S^* J_{пс}. \tag{3.36}$$

Индекс покупательной способности денег, как известно, равен обратной величине индекса цен:

$$J_{пс} = 1/J_p. \tag{3.37}$$

Разумеется, указанные индексы должны относиться к одним и тем же временным интервалам. Пусть, например, сегодня получено 180 тыс. руб., известно, что за два предшествующих года цены увеличились в три раза, т.е. $J_p = 3$. В этом случае индекс покупательной способности денег равен 1/3. Следовательно, реальная покупательная способность 180 тыс. руб. составит в момент получения всего 180*(1/3) = 60 тыс. руб. в деньгах двухлетней давности.

Нетрудно связать индекс цен и темп инфляции. Предварительно напомним некоторые понятия. Под темпом инфляции обычно понимается относительный прирост цен за период; обозначим его как Н; измеряется в процентах. Темп инфляции и индекс цен связаны следующим образом:

$$H = 100(J_p - 1). \tag{3.38}$$

В свою очередь,

$$J_p = (1 + H/100). \tag{3.39}$$

Например, если темп инфляции равен 130%, то цены за этот период выросли в 2,3 раза.

Вернемся к проблеме обесценения денег при их наращении. В общем случае теперь можно записать:

$$C = S / J_p. \tag{3.40}$$

Если наращение производится по простой ставке, имеем:

$$C = P[(1 + ni)/ J_p] = P[(1 + ni)/(1 + h/100)^n]. \tag{3.41}$$

Как видим, увеличение наращенной суммы с учетом сохранения покупательной способности денег имеет место только тогда, когда $1 + ni > J_p$.

Наращение по сложным процентам:

$$C = P[(1 + i)^n / J_p] = P[(1 + i)/(1 + h/100)]^n. \tag{3.42}$$

На рис. 3.2 видно, как влияют ставка процента i и темп инфляции h на величину C. Очевидно, что если среднегодовой темп инфляции равен ставке процентов, то роста реальной суммы не произойдет: наращение будет поглощаться инфляцией и, следовательно, C = P. Если же $h/100>i$, то наблюдается «эрозия капитала», его реальная сумма будет меньше первоначальной. Только в ситуации, когда $h/100<i$, происходит реальный рост.

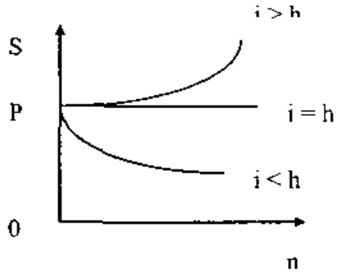

Рис. 3.2. Влияние темпа инфляции на наращение процентов

Процентная ставка, при которой наращение будет только компенсировать инфляцию:

для простых процентов

$$i^* = (J_p-1)/n, \tag{3.43}$$

для сложных процентов

$$i^* = h; \tag{3.44}$$

ставку, превышающую i*, называют *положительной ставкой процента.*

Владельцы денег, разумеется, предпринимают различные попытки для компенсации обесценения денег. Наиболее распространенной является корректировка ставки процентов, по которой осуществляется наращение, т.е. увеличение ставки на величину так называемой *инфляционной премии*, иначе говоря, производится индексация ставки. Итоговую величину можно назвать *брутто – ставкой*:

$$r = [(1 + ni)J_p - 1]/n. \tag{3.45}$$

Величина брутто–ставки для наращения по сложной ставке процента:

$$r = i + h/100 + (h/100)i. \tag{3.46}$$

Разумеется, что при высоких темпах инфляции корректировка (индексация) ставки имеет смысл только для кратко- или в крайнем случае для среднесрочных операций.

Перейдем теперь к решению обратной задачи – к измерению реальной ставки процента, т.е. доходности с учетом инфляции – определению i по заданному значению брутто–ставки. Если r – объявленная норма доходности (брутто-ставка), то искомый показатель доходности в виде готовой процентной ставки i можно определить при начислении простых процентов как

$$i = 1/n\,[(1 + nr)/J_p - 1]. \qquad (3.47)$$

Реальная доходность, как видим, здесь зависит от срока наращения процентов. Напомним, что фигурирующий в этой формуле индекс цен охватывает весь период начисления процентов.

Аналогичный по содержанию показатель, но при наращении по сложным процентам, найдем:

$$i = [(1 + r)/(1 + h/100)] - 1. \qquad (3.48)$$

Таким образом, **реальная процентная ставка** – это ставка, скорректированная на процент инфляции. Реальная ставка говорит о приросте покупательной способности средств инвестора.

Основные термины и понятия:

Эквивалентность финансовых обязательств
Эквивалентные процентные ставки
Средние ставки
Консолидация обязательств
Консолидированный платеж
Консолидированный срок
Кривые доходности
Брутто-ставка
Индексация ставок
Реальная ставка

Вопросы для обсуждения:

1. В чем заключается принцип финансовой эквивалентности обязательств? Приведите примеры.
2. Для чего осуществляется консолидация задолженности и как в данном случае определяется сумма консолидированного платежа?
3. Как определяется взаимосвязь различных видов ставок?
4. Для чего вводится понятие «средней процентной ставки»?
5. Что может компенсировать риск невозврата ссуды? Поясните на основе модели кривых доходности.
6. Как налоги и инфляция влияют на наращение и дисконтирование процентов?

Примеры решения задач:

1. Три платежа по кредитному договору в 60 000, 80 000, 110 000 руб. со сроками выплат 30, 80 и 300 дней объединяются в один со сроком в 250 дней. Какова величина консолидированного платежа, если стороны согласились использовать ставку 18% годовых (схема ACT/ACT)?

Решение: поскольку сроки по договору меньше года, речь идет о простых процентах; консолидация платежей осуществляется по формуле (3.3):

$S_0=\Sigma S_j*(1+t_j i) +\Sigma S_k*(1+t_k i)^{-1}$, причем $t_j = n_0-n_j$, $t_k=n_k - n_0$;

$$60000(1+\frac{250-30}{365}0{,}18)+80000(1+\frac{250-80}{365}0{,}18)+110000(1+\frac{300-250}{365}0{,}18)^{-1}=260569;$$

(при решении подобных задач важно разобраться со сроками платежей, т.к. сроки объединяемых платежей могут быть меньше n_0, тогда осуществляется наращение, и больше n_0, тогда осуществляется приведение платежа к более ранней дате - дисконтирование).

2. Погашение кредита предполагалось погасить двумя платежами: 500 000 руб. через 1,5 года и 800 000 руб. через два года. После переговоров платежи были заменены одним в 1,6 млн. руб. при ставке 18%. Определить точное значение срока данного платежа.

Решение: для сложных процентов:

$$n_0=\frac{\ln\left(\frac{S_0}{\Sigma S_j(1+i)^{-n_j}}\right)}{\ln(1+i)};$$

$$\ln\left(\frac{1{,}6}{0{,}5(1{,}18)^{-1{,}5}+0{,}8(1{,}18)^{-2}}\right)/\ln(1{,}18)=3 \text{ года.}$$

3. Долговое обязательство учтено банком за 90 дней до его погашения по учетной ставке 12% годовых. Какова доходность данной операции для схемы ACT/ACT?

Решение: по условию дана простая учетная ставка d_s, необходимо определить эквивалентную ей простую ставку наращения:

$i_s=d_s/(1-nd_s)$;

$$\frac{0{,}12}{(1-\frac{90}{365}0{,}12)}=0{,}124*100\%=12{,}4\%.$$

4. В контракте сроком на два года предусмотрено начисление процентов по ставке 12% годовых (простые проценты). По окончании контракта заемщик принял решение формировать погасительный фонд за счет ежеквартальных отчислений. Определить уровень процентной ставки этих отчислений (номинальная ставка).

Решение: эквивалентность простой ставки наращения i_s и сложной номинальной ставки j, отчисления ежеквартальные, значит, m=4:

$$j = m * (\sqrt[mn]{1 + n * i_S} - 1);$$

$$4 * (\sqrt[4*2]{1 + 2 * 0{,}12} - 1) = 0{,}109 * 100\% = 10{,}9\%.$$

5. Кредитное соглашение предусматривает переменную ставку по периодам (простые проценты): 10%, 14%, 21%. Продолжительность периодов: 1 квартал, 5 месяцев, 9 месяцев. Какой размер ставки приведет к аналогичному наращению суммы?

Решение: в данном случае необходимо определить простую среднюю ставку, эквивалентную перечисленным ставкам:

$$\bar{i} = \frac{\sum n_t * i_t}{N};$$

$$\frac{3 * 0{,}1 + 5 * 0{,}14 + 9 * 0{,}21}{17} = 0{,}17 * 100\% = 17\%.$$

Раздел 2. ПОТОКИ ПЛАТЕЖЕЙ

Тема 4. Потоки платежей. Ренты постнумерандо

4.1. Виды рент и их основные параметры. Классификация рент
4.2. Наращенная сумма постоянной ренты постнумерандо
4.3. Современная стоимость постоянной ренты постнумерандо
4.4. Определение параметров постоянных рент постнумерандо

4.1. Виды рент и их основные параметры. Классификация рент

Финансово-банковские операции часто предполагают не отдельные или разовые платежи, а некоторую их последовательность во времени (погашение задолженности в рассрочку, периодическое поступление доходов от инвестиций, выплата пенсий). Такие последовательности, или ряды платежей, называют потоком платежей. Отдельный элемент этого потока называют членом потока. Потоки платежей могут быть регулярными и нерегулярными. В нерегулярном потоке платежей членами являются как положительные (поступления), так и отрицательные величины (выплаты), а соответствующие платежи могут производиться через разные интервалы времени.

Поток платежей, все члены которого положительные величины, а временные интервалы между платежами одинаковы, называют **финансовой рентой** или **аннуитетом**, независимо от назначения и происхождения платежей (получение процентов по облигациям, платежи по потребительскому кредиту, выплаты в рассрочку страховых премий и т.д.).

Рента характеризуется следующими параметрами:

- член ренты - размер отдельного платежа;
- период ренты – временной интервал между двумя последовательными платежами;
- срок ренты – время от начала первого периода ренты до конца последнего периода;
- процентная ставка.

При характеристике отдельных видов рент необходимы дополнительные условия и параметры: число платежей в году, способ и частота начисления процентов.

Классификация рент:

1. По количеству выплат членов ренты на протяжении года – годовые (выплата раз в году), p-срочные (p – количество выплат в году), ренты с периодом, превышающим год;
2. По количеству начислений процентов на протяжении года – с ежегодным начислением, с начислением m-раз в году, с непрерывным начислением;
3. По величине членов – постоянные (с одинаковыми платежами), переменные;

4. По вероятности выплат – верные (безусловные), условные (зависят от наступления случайного события);

5. По количеству членов – ограниченные по срокам (с конечным числом членов), бесконечные или вечные ренты;

6. По соотношению начала срока рента и момента времени, упреждающего начало ренты (относительно даты заключения договора) - немедленные, отсроченные;

7. По моменту выплат платежей в пределах периода – постнумерандо (платежи в конце периода), пренумерандо (в начале периода), в середине периода.

Анализ потока платежей предполагает расчет одной из двух обобщающих характеристик: наращенной суммы или современной стоимости.

Наращенная сумма – сумма всех членов потока платежей с начисленными на них к концу срока процентами (общая сумма накопленной задолженности к концу срока, итоговый объем инвестиций, накопленный денежный резерв и т.д.).

Современная стоимость – сумма всех членов потока, дисконтированных на начало срока ренты или некоторый момент времени (инвестиционные затраты, приведенные к началу осуществления проекта, суммарный капитализированный доход, чистая приведенная прибыль от реализации проекта и т.д.). В старой русской финансовой литературе такой показатель назывался настоящей ценой платежей.

Данные характеристики широко применяются в различных финансовых расчетах, например, при разработке плана последовательного погашения задолженности, измерении финансовой эффективности проекта, безубыточном изменении условий контрактов и т.д.

4.2. Наращенная сумма постоянной ренты постнумерандо

Годовая рента.

$$S = R * \frac{(1+i)^n - 1}{i}, \tag{4.1}$$

где S – наращенная сумма ренты;

R – член ренты;

i – процентная ставка;

$s_{n;i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$ – коэффициент наращения ренты;

$$S = R * s_{ni}. \tag{4.2}$$

Из формулы видно, что коэффициент наращения ренты зависит только от срока (числа членов ренты) и процентной ставки; с увеличением каждого из этих параметров его величина увеличивается. Значение коэффициента легко табулируется (см. приложение).

Годовая рента, начисление процентов m раз в году.

Проценты начисляются несколько раз в году, например, поквартально, по полугодиям, помесячно.

$$S = R * \frac{(1 + j/m)^{mn} - 1}{(1 + j/m)^{m} - 1}, \tag{4.3}$$

$$S = R * s_{mn;\,j/m} \tag{4.4}$$

где j – номинальная процентная ставка.

Рента p-срочная (m=1).

Рента выплачивается несколько раз в году, проценты начисляются один раз в конце года.

$$S = R * \frac{(1 + i)^{n} - 1}{p * [(1 + i)^{1/p} - 1]}, \tag{4.5}$$

$$S = R * s^{(p)}_{n;i} \tag{4.6}$$

Рента p-срочная (p=m).

Число выплат в году равно числу начислений процентов.

$$S = R * \frac{(1 + j/m)^{mn} - 1}{j}. \tag{4.7}$$

Рента p-срочная (p≠m).

$$S = R * \frac{(1 + j/m)^{mn} - 1}{p * [(1 + j/m)^{m/p} - 1]}. \tag{4.8}$$

Приведенные формулы показывают, что условия выплат (их частота) и наращения процентов заметно влияют на размер наращенной суммы. Определенный интерес представляет соотношение этих сумм для различных видов рент. Сравниваемые суммы обозначим следующим образом - S(p;m): S(1;1) – наращенная сумма годовой ренты, с ежегодным начислением процентов; S(1;m) – для ренты с начислением процентов m раз в году и т.д. Годовые выплаты, продолжительность рент и размеры процентных ставок – одинаковы.

$$\mathbf{S(1;1) < S(1;m)_{m>1} < S(p;1)_{p>1} < S(p;m)_{p>m>1} < S(p;m)_{p=m>1} < S(p;m)_{m>p>1}.}$$

Данные неравенства могут быть использованы при выборе условий контрактов, т.к. позволяют заранее (до расчета) получить представление о приоритете того или иного условия.

4.3. Современная стоимость постоянной ренты постнумерандо

Годовая рента.

$$A = R * \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}, \tag{4.9}$$

где A – современная стоимость ренты;

$a_{n;i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ – коэффициент приведения ренты.

Чем выше значение процентной ставки, тем меньше величина коэффициента; при увеличении срока ренты данный показатель стремится к пределу.

Годовая рента, начисление процентов m раз в году.

$$A = R * \frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{(1+j/m)^{m}-1}, \tag{4.10}$$

$$A=R*a_{mn;j/m}. \tag{4.11}$$

Рента p-срочная (m=1).

$$A = R * \frac{1-(1+i)^{-n}}{p*[(1+i)^{1/p}-1]}. \tag{4.12}$$

Рента p-срочная (p=m).

$$A = R * \frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{j}. \tag{4.13}$$

Рента p-срочная (p≠m).

$$A = R * \frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{p*[(1+j/m)^{m/p}-1]}. \tag{4.14}$$

Приведем соотношения современных стоимостей различных видов рент для одних и тех же годовых сумм выплат и процентных ставок - A(p;m):

$$\mathbf{A(1;m)<A(1;1)<A(p;m)_{m>p>1}<A(p;m)_{p=m>1}<A(p;m)_{p>m>1}<A(p;1).}$$

4.4. Определение параметров постоянных рент постнумерандо

Иногда при разработке контракта возникает необходимость в определении срока ренты, и соответственно, числа членов ренты. Формулы для расчета срока различных видов рент представлены в таблице 6 приложения.

При расчете срока ренты необходимо принять во внимание следующие моменты:

1. Расчетные значения срока, как правило, получаются дробными, поэтому необходимо округлять результат – до ближайшего меньшего целого числа (до *ближайшего целого числа периодов*).

2. При округлении до меньшего целого числа наращенная сумма ренты или ее современная стоимость оказывается меньше заданной. Необходимо скорректировать результат путем осуществления соответствующих платежей в начале или в конце срока либо с помощью повышения суммы члена ренты.

Необходимость в определении величины процентной ставки возникает всякий раз, когда речь идет об эффективности (доходности) финансовой операции. Расчет процентной ставки по остальным параметрам ренты затруднен, поэтому *в данном случае прибегают к помощи соответствующих пакетов компьютерных программ* или методу линейной интерполяции.

Основные термины и понятия:

Потоки платежей	*p*-срочная рента
Финансовые ренты	Вечная рента
Аннуитет	Рента пренумерандо
Параметры ренты	Отложенная рента
Годовая рента	*Рента постнумерандо*

Вопросы для обсуждения:

1. Что такое аннуитет?
2. Какие параметры определяют ренту?
3. В чем отличие годовой ренты от *p*-срочной ренты?
4. Что такое вечная рента? Приведите примеры.
5. Как классифицируются ренты в зависимости от момента выплаты платежей в пределах периода?
6. Приведите различные варианты выплаты *p*-срочной ренты.
7. Как осуществляется наращение постоянных финансовых рент постнумерандо?
8. Как определяется современная стоимость постоянной ренты постнумерандо?
9. Какие факторы необходимо учитывать при расчете срока ренты?

Рекомендации по решению задач:

При решении задач по данной теме необходимо, прежде всего, определить, о какой ренте идет речь в условии задачи. Далее, если необходимо найти будущую сумму, например, к окончанию срока ренты, то выбираем формулу для нахождения наращенной суммы по соответствующей ренте. Если же необходимо определить размер ренты на настоящий момент времени, то выбираем формулу для нахождения современной стоимости по соответствующей ренте. Для нахождения срока ренты с любыми условиями можно воспользоваться таблицей 6 (см. приложение).

Примеры решения задач:

1. Для приобретения оборудования фирма организует фонд по следующей схеме:

- платежи вносятся ежегодно в течение 5 лет в конце финансового года;
- сумма разового платежа 2 млн. руб.;
- *проценты начисляются ежегодно по ставке 16% годовых.*

Определить размер фонда к окончанию срока его формирования.

Решение: поскольку платежи по ренте вносятся в конце года и проценты начисляются один раз в году, то речь идет о годовой ренте постнумерандо; т.к. необходимо определить размер фонда к окончанию срока – находим наращенную сумму годовой ренты постнумерандо (4.1):

$$S = R * \frac{(1+i)^n - 1}{i};$$

$$2 * \frac{(1+0{,}16)^5 - 1}{0{,}16} = 13{,}75 \text{ млн. руб.}$$

2. Транш облигаций в количестве 100 тыс. шт. и номиналом 10 руб. выпущен на три года. Какова должна быть величина ежеквартальных отчислений в выкупной фонд, если проценты по ставке 12% годовых начисляются ежеквартально?

*Решение: проценты начисляются ежеквартально (m=4), отчисления в фонд также осуществляются ежеквартально (p=4), конечная сумма известна – 1 млн. руб. (100 000*10), необходимо определить член p–срочной ренты (p= m):*

из формулы(4.7)

$$S = R * \frac{(1+j/m)^{mn} - 1}{j}$$

находим

$$R = \frac{S * j}{(1+j/m)^{mn} - 1}; \qquad \frac{1000000 * 0{,}12}{(1+0{,}12/4)^{3*4} - 1} = 279{,}07 \text{ тыс. руб.}$$

Тема 5. Основные характеристики других видов рент

5.1. Рента пренумерандо

Рента пренумерандо – рента с платежами в начале периодов. Различие между рентами постнумерандо и пренумерандо – в числе периодов начисления процентов. Каждый член ренты пренумерандо работает на один период больше, чем в ренте постнумерандо, поэтому наращенная сумма ренты пренумерандо в *(1+i)* раз больше, чем аналогичная сумма ренты постнумерандо.

Годовая рента пренумерандо:

$$\ddot{S} = S(1+i). \tag{5.1}$$

Рента с начислением процентов *m* раз в году:

$$\ddot{S} = S(1+j/m)^m. \tag{5.2}$$

Для *p*-срочных рент, у которых m=1 и m≠p, получим:

$$\ddot{S} = S(1+i)^{1/p}, \tag{5.3}$$

$$\ddot{S} = S(1+j/m)^{m/p}, \tag{5.4}$$

при этом *S* находится по формуле соответствующей ренты постнумерандо (см. тему 4).

Такая же зависимость характерна и для современных стоимостей рент пренумерандо:

$\ddot{A} = A(1+i)$ и т.д.

5.2. Рента с выплатами в середине периодов

Рента с платежами в середине периодов – частный случай годовой ренты. Применяется в случаях, когда поступления от производственных инвестиций распределяются более или менее равномерно, применение рент постнумерандо или пренумерандо для описания таких потоков может привести к получению смещенного результата. Для уменьшения погрешности в данном случае поступления за период относят к середине периодов, например, если поступление средств происходит ежемесячно. Наращенные суммы и современные стоимости таких рент находят умножением соответствующих характеристик рент постнумерандо *на множитель наращения за половину периода:*

$$S_{1/2}=S(1+i)^{1/2} \text{ при } p=1,\ m=1, \tag{5.5}$$

$$S_{1/2}=S(1+j/m)^{m/2} \text{ при } p=1,\ m>1, \tag{5.6}$$

$$S_{1/2}=S(1+i)^{1/2p} \text{ при } p>1,\ m=1, \tag{5.7}$$

$$S_{1/2}=S(1+j/m)^{m/2p} \text{ при } p>1,\ m>1. \tag{5.8}$$

5.3. Отложенные ренты

Отложенная рента – начало выплат ренты сдвинуто вперед относительно некоторого момента времени. *При этом сдвиг во времени никак не отражается* на величине наращенной суммы. А вот современная стоимость ренты на начало отсрочки равна дисконтированной величине современной стоимости немедленной ренты. Для годовой ренты:

$${}_tA = A*(1+i)^{-t} = Ra_{n;i}*(1+i)^{-t}\ , \tag{5.9}$$

где ${}_tA$ – современная стоимость отложенной ренты.

Современная стоимость отложенной ренты используется при решении целого ряда задач, чаще в расчетах, связанных с выплатами различного рода накоплений.

При решении задач по данному виду рент иногда необходимо определить новый срок получения ренты: учитывая, что $n_2=n-n_1$, находим:

$$n_1 = \frac{-\ln\{[1+(1+i)^{-n}]/2\}}{\ln(1+i)}. \tag{5.10}$$

Результат решения зависит от общего срока ренты и процентной ставки, *учитываемой в расчете.*

5.4. Вечная рента

Вечная рента – ряд платежей, количество которых не ограничено, теоретически она выплачивается в течение бесконечного числа лет. В практике иногда сталкиваются со случаями, когда прибегают к подобной абстракции – если срок платежей очень большой и конкретно не оговаривается. Например, при *оценке пенсионных фондов, определении их способности отвечать по своим* обязательствам перед участниками, при оценке некоторых видов облигаций.

Наращенная сумма вечной ренты равна бесконечно большой величине. Современная стоимость вечной ренты зависит от размера члена ренты и процентной ставки:

$$A = R/i. \tag{5.11}$$

Отдаленные платежи оказывают весьма малое влияние на величину коэффициента приведения. С ростом срока прирост этого показателя будет уменьшаться.

Для других видов рент:

$$A = \frac{R}{p[(1+i)^{1/p} - 1]} \text{ при } (p>1;\ m=1), \tag{5.12}$$

$$A = R/j \text{ при } (p=m>1). \tag{5.13}$$

5.5. Рента с периодом платежей, превышающим год

Рента с периодом платежей, превышающим год – члены ренты выплачиваются с интервалами, превышающими год. Такие ренты применяются при анализе производственных инвестиционных проектов, имеющих долгосрочный характер. Современная стоимость такой ренты равна:

$$A = T[a_{n;i} / s_{r;i}], \tag{5.14}$$

где T – величина члена ренты;

r – временной интервал между двумя членами ренты.

Соотношение коэффициентов приведения и наращения можно использовать в случае, когда r – целое число лет.

5.6. Взаимоувязанные, последовательные потоки платежей

Долгосрочные финансовые операции часто предполагают наличие двух последовательных потоков платежей. Первый характеризует вложения (затраты), второй – отдачу от них (доходы). На первом этапе идет накопление денежных средств, посредством последовательных взносов, на втором – их расходование. Более сложным является инвестирование в создание производственного объекта. Второй денежный поток может следовать сразу после первого или несколько отставать от него. Встречаются и более сложные схемы, когда указанные потоки платежей в некоторой части протекают одновременно.

При решении финансовых задач оба потока должны быть сбалансированы. Особенно это важно при оценке производственных инвестиций. Если речь идет об обеспечении поступлений регулярного дохода, доходы и взносы постоянные, постнумерандо, то баланс двух потоков имеет место при равенстве их современных стоимостей:

$A_1={}_tA_2$,

$$K*a_{n;i}=R*a_{N;i}*(1+i)^{-t}, \qquad (5.15)$$

где n – продолжительность периода вложений;

t – срок, после которого начинается отдача;

N – продолжительность потока доходов;

m – продолжительность интервала между двумя потоками;

K – величина члена первого потока;

R – размер дохода;

A_1 – современная стоимость потока вложений;

${}_tA_2$ - современная стоимость потока доходов.

Заметим, что $(1+i)^{-t}=(1+i)^{-n}*(1+i)^{-m}$, это означает, что с увеличением m уменьшается необходимая для выплаты будущих доходов величина К.

Основные термины и понятия:

Рента пренумерандо

Отложенная рента

Вечная рента

Взаимоувязанные потоки платежей

Рента с платежами в середине периодов

Рента с периодом платежей, превышающим год

Вопросы для обсуждения:

1. Чем отличается годовая рента пренумерандо от годовой ренты постнумерандо?
2. В каких случаях может применяться рента с платежами в середине периодов?
3. Приведите примеры использования отложенной и вечной рент.
4. Поясните на примере схему сбалансированных потоков платежей.

Примеры решения задач:

1. Финансовая компания создает фонд для погашения своих облигаций путем помещения в банк сумм в размере 200 тыс. руб. Взносы производятся по схеме: а) пренумерандо, ежеквартально, проценты банком начисляются один раз в конце года; б) постнумерандо, ежеквартально, проценты банком начисляются также ежеквартально. Определить величину фонда в конце пятого года и современную стоимость потока платежей при условии, что проценты банком начисляются по ставке 20% годовых.

Решение: а) рента пренумерандо, p-срочная (p=4, m=1):

$$\ddot{S} = S(1+i)^{1/p}, \quad S = R * \frac{(1+i)^n - 1}{p*[(1+i)^{1/p} - 1]};$$

$$\ddot{A} = A(1+i)^{1/p}, \quad A = R * \frac{1-(1+i)^{-n}}{p*[(1+i)^{1/p} - 1]};$$

б) рента постнумерандо, p-срочная (p=4, m=4):

$$S = R * \frac{(1+j/m)^{mn} - 1}{j};$$

$$A = R * \frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{j}.$$

Тема 6. Изменение условий постоянных рент

6.1. Конвертирование условий аннуитета
6.2. Изменение параметров ренты

6.1. Конвертирование условий аннуитета

Конвертирование условий аннуитета происходит, если необходимо по какой-то причине изменить условия выплаты ренты. Простейшими случаями конвертирования являются: выкуп ренты, рассрочка платежей. Более сложные – консолидация рент, замена ренты с одними условиями на ренту с другими условиями. *Конверсия не должна приводить к изменению финансовых показателей сторон, т.е. должен соблюдаться принцип финансовой эквивалентности обязательств.*

Выкуп ренты – замена ренты разовым платежом. Размер этого платежа *должен быть равен современной стоимости выкупаемой ренты.* В зависимости от условий погашения задолженности выбирается та или иная формула расчета современной стоимости потока платежей. При этом процентная ставка, применяемая при пересчете, должна удовлетворять участвующие стороны.

Рассрочка платежей – *замена разового платежа рентой, т.е. задача, обратная выкупу ренты.* Если некоторая крупная сумма погашается частями – в рассрочку, то это удобно сделать в виде выплаты постоянной ренты. Для этого современная стоимость ренты, с помощью которой производится рассрочка, приравнивается к сумме долга, далее определяется необходимый параметр ренты (см. тему 4).

Консолидация рент – объединение рент или замена нескольких рент одной. В данном случае необходимо приравнять современные стоимости заменяющей и заменяемых рент:

$$A=\Sigma A_q . \tag{6.1}$$

Объединяемые ренты $\mathbf{A_q}$ могут быть любыми, заменяющая рента должна быть четко определена, за исключением одного параметра, который фиксирует условие эквивалентности. Это может быть член ренты или ее срок:

$$R=\Sigma A_q / a_{n;i} , \tag{6.2}$$

$$n=\frac{-\ln(1-\sum\frac{Aq}{R}*i)}{\ln(1+i)} . \tag{6.3}$$

Для того чтобы задача имела решение, необходимо соблюдать условие: $(\Sigma A_q / R)*i < 1$.

Для частного случая, когда член заменяющей ренты равен сумме членов заменяемых рент, все ренты годовые, постнумерандо, процентная ставка по всем рентам одинакова, срок заменяющей ренты равен:

$$n=\frac{\ln R-\ln\sum Rq(1+i)^{-nq}}{\ln(1+i)} . \tag{6.4}$$

6.2. Изменение параметров ренты

Замена немедленной ренты на отсроченную – немедленная рента постнумерандо откладывается на t лет (t не входит в срок ренты). Приравняв их современные стоимости, получим ($n_2=n_1=n$):

$$R_1 a_{n;i} = R_2 a_{n;i} *v^t , \tag{6.5}$$

$$R_2= R_1\, a_{n;i} / a_{n;i} *v^t = R_1 / v^t = R_1(1+i)^t. \tag{6.6}$$

Из формулы следует, что член новой ренты равен наращенному за время t члену заменяемой ренты.

При $n_2 > n_1$:

$$R_2= R_1\, [a_{n1;i} / a_{n2;i}]*(1+i)^t. \tag{6.7}$$

Если член ренты остается без изменений, то из равенства современных стоимостей следует:

$$n_2=\frac{-\ln[1-((1-(1+i)^{-n}))*(1+i)^t]}{\ln(1+i)} . \tag{6.8}$$

Замена годовой ренты на p-срочную:

$$R_2 = R_1 \, [a_{n1;i} / a^{(p)}_{n2;i}]. \quad (6.9)$$

Если $n_2=n_1=n$, то

$$a_{n;i} / a^{(p)}_{n;i} = \frac{p*[(1+i)^{1/p} - 1]}{i}, \quad (6.10)$$

отсюда находим:

$$R_2 = R_1 \frac{p*[(1+i)^{1/p} - 1]}{i}. \quad (6.11)$$

При решении задач следует помнить, что, как уже упоминалось выше, изменение любых условий при выплате аннуитета требует соблюдения принципа эквивалентности обязательств, в основу замены должно быть положено равенство соответствующих современных стоимостей потоков платежей.

Основные термины и понятия:

Конверсия платежей

Выкуп ренты

Консолидация рент

Изменение параметров рент

Вопросы для обсуждения:

1. В каких случаях применяется конвертирование условий аннуитета?
2. Как определяется сумма выкупа ренты?
3. Приведите алгоритм определения зависимости для нахождения параметров консолидированной ренты.
4. Разработайте схему замены одного потока платежей другим.

Примеры решения задач:

1. Компания погашает стоимость оборудования ежегодными выплатами в размере 800 тыс. руб. в течение 8 лет. Платежи осуществляются в конце финансового года. Стороны договорились об изменении схемы:

- выплаты откладываются на 2 года;
- срок выплат не изменяется;
- ставка, используемая для перерасчета, равна 16% годовых.

Определить величину ежегодных выплат по новой схеме.

Решение: годовая немедленная рента постнумерандо заменяется на отложенную ренту, при этом срок выплат не изменяется, значит, можно воспользоваться формулой (6.6):

$R_2 = R_1(1+i)^t,$

$800000(1+0,16)^2=1076480$ *руб.*

2. Консолидируются ренты, предусматривающие годовые платежи в размерах: 5 тыс. руб., 15 тыс. руб. и 30 тыс. руб.; сроки этих рент: 10, 15 и 12 лет соответственно. Член заменяющей ренты равен 50 тыс. руб. Ставка по заменяющей ренте – 5% годовых. Определить срок заменяющей ренты.

Решение: три ренты постнумерандо объединяются в одну, при этом член заменяющей ренты равен сумме членов заменяемых рент, это один из частных случаев, поэтому можем воспользоваться формулой (6.4):

$$n = \frac{\ln R - \ln \sum R_q (1+i)^{-n_q}}{\ln(1+i)},$$

$$\frac{\ln 50000 - \ln(5000 * 1{,}05^{-10} + 15000 * 1{,}05^{-15} + 30000 * 1{,}05^{-12})}{\ln 1{,}05} = 12{,}64 \text{ года.}$$

Раздел 3. ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ МЕТОДОВ ФИНАНСОВОГО КОЛИЧЕСТВЕННОГО АНАЛИЗА

Тема 7. Планирование погашения долгосрочной задолженности

7.1. Основные параметры планирования погашения *долгосрочной задолженности*

При погашении долгосрочной задолженности одной из важнейших задач является разработка плана погашения займа, адекватного принятым условиям *финансового соглашения.*

Разработка плана погашения займа заключается в составлении графика (расписания) периодических платежей должника.

Такие расходы должника называются расходами по обслуживанию долга или более кратко - срочные выплаты, расходы по займу. Расходы по обслуживанию долга включают как текущие процентные платежи, так и средства, предназначенные для погашения основного дога.

Методы определения размера срочных выплат зависят от условий погашения долга, включающих:

- срок займа;
- продолжительность льготного периода;
- уровень и вид процентной ставки;
- методы уплаты процентов;
- способ погашения основной суммы долга.

В долгосрочных займах проценты обычно выплачиваются на протяжении всего срока займа и редко присоединяются к основной сумме долга. Основная сумма выплачивается одним платежом, чаще частями в рассрочку.

В льготном периоде погашаются только проценты.

Для решения задачи по определению срочных выплат примем следующие обозначения:

D – сумма задолженности;

Y – срочная выплата;

I – проценты по долгу;

R – расходы по погашению основного долга;

g – ставка процента по займу;

n – общий срок займа;

L – продолжительность льготного периода;
N – срок формирования фонда погашения.

По определению срочная выплата определяется зависимостью:

$$Y = I + R. \tag{7.1}$$

Для льготного периода:

$$Y = I. \tag{7.2}$$

7.2. Планирование погасительного фонда

Если по условиям займа заемщик обязуется вернуть сумму долга в конце срока в виде разового платежа, то он должен предпринять меры для обеспечения этой операции. При значительной сумме долга формируется погасительный фонд – т.е. накапливаемый для погашения долга резерв. Необходимость его формирования может быть оговорена в договоре займа в качестве гарантии его погашения. Данный фонд формируется последовательными взносами на специальный счет в банке, на который начисляются проценты. Таким образом, заемщик имеет возможность последовательно инвестировать средства для погашения долга.

Понятно, что сумма взносов в фонд с начисленными процентами должна к концу срока равняться его сумме. Взносы могут быть как постоянными, так и переменными.

Постоянные взносы в фонд

Срочная выплата равна:

$$Y = gD + R, \tag{7.3}$$

$$R = D/s_{N,i}. \tag{7.4}$$

Если контракт предусматривает присоединение процентов к сумме основного долга, то срочная выплата равна:

$$Y = D[(1+g)^N / s_{Ni}]. \tag{7.5}$$

При создании погасительного фонда используются две ставки, i и g. Первая определяет темп роста погасительного фонда, вторая – сумма выплачиваемых за заем процентов.

Создание фонда выгодно должнику при i>g, т.к. в этом случае должник на аккумулируемые в погасительном фонде средства получает больше процентов, чем сам выплачивает за займ.

При i=g преимущества погасительного фонда исчезают.

Финансовые результаты для должника оказываются такими же, как и при погашении долга частями.

Накопленные за t лет средства фонда определяются по стандартным зависимостям для наращенных сумм постоянных рент или рекуррентно:

$$S_{t+1} = S_t(1+i)+R. \tag{7.6}$$

Изменяющиеся взносы

Иногда предпочтительнее использовать не постоянные взносы в фонд, а переменные во времени суммы взносов. Срочные выплаты в данном случае меняются во времени:

$$Y_t = Dg + R_t, \tag{7.7}$$

где $R_t = R + a(t-1)$, $t = 1 \ldots N$
a – темп прироста (R, R+a, R+2a…)

Расходы по погашению основного долга составят:

$$R = \frac{1}{s_{Ni}} * [D - a * \frac{(1+i)^N - (1+Ni)}{i^2}]. \tag{7.8}$$

7.3. Погашение долга в рассрочку

Погашение долга в рассрочку (амортизация долга) предполагает выплату задолженности по частям в течение определенного периода времени.

Может осуществляться двумя способами:

- погашение основного долга равными суммами;
- погашение всей задолженности равными суммами по обслуживанию долга (срочными выплатами);
- погашение всей задолженности переменными суммами по обслуживанию долга (срочными выплатами).

Погашение основного долга равными суммами

Пусть долг D погашается равными долями в течение n лет. Ежегодная сумма, идущая на погашение, составит:

$$d = D/n. \tag{7.9}$$

Размер долга последовательно уменьшается: D, D-d, D-2d… Соответственно уменьшаются и выплачиваемые проценты, т.к. они начисляются на остаток долга. Пусть проценты выплачиваются раз в год по ставке g. Тогда ряд выплат процентов имеет вид: Dg; (D-d)g; (D-2d)g…

Эти платежи образуют убывающую арифметическую прогрессию. Срочная выплата в конце первого года:

$$Y_1 = D_0g+d. \tag{7.10}$$

Для конца года t: t=1…n

$$Y_t = D_{t-1}g + d\,. \tag{7.11}$$

Остаток долга на конец года t - D_t, при D_0= D

$$D_t = D_{t-1}\,[(n-1)/n]. \tag{7.12}$$

Если долг выплачивается *p* раз в год и с такой же частотой выплачиваются проценты по ставке g/p, то срочная выплата составит:

$$Y_t = (D_{t-1}\,{*}g)\,/\,p + D_0\,/\,pn. \tag{7.13}$$

Остаток задолженности на конец года t равен:

$$D_t = D_{t-1}\,[(pn-1)/pn]. \tag{7.14}$$

Аналогично определяется и для других видов рент.

Погашение долга равными срочными выплатами

Для данного метода расходы должника по обслуживанию долга постоянны на протяжении всего срока его погашения.

Из общей суммы расходов должника часть выделяется на выплату процентов, а остаток идет на погашение основного долга. Величина долга здесь также последовательно уменьшается, следовательно, уменьшаются платежи по процентам и возрастает доля, идущая на погашение долга.

План погашения разрабатывается при известном сроке займа, затем определяется размер срочной выплаты, которая делится на процентные платежи и сумму, идущую на погашение долга (остаток).

Реже решают альтернативную задачу, т.е. по фиксированной сумме срочных выплат определяется срок погашения долга (указывается в контракте).

Периодическая выплата постоянной суммы У – это рента с заданными параметрами. Приравняв сумму долга к современной величине ренты, находим:

$$D = У{*}a_{n,g}\ , \tag{7.15}$$

$$У = D/\,a_{n*g}\,. \tag{7.16}$$

Определим сумму первого погасительного платежа: (сумма, которая из выплаты $У$ идет на погашение основного долга).

$$d_1 = У - D_0 * g. \tag{7.17}$$

Суммы, которые идут на погашение основного долга, увеличиваются во времени:

$$d_t = d_{t-1}(1+g). \tag{7.18}$$

Поэтому этот метод называется еще *прогрессивным*.

Можно определить сумму погашенной задолженности на конец года t (после очередной выплаты).

$$W_t = \sum_{k=0}^{t-1} d_1(1+g)^k = d_1 * s_{t,g}, \tag{7.19}$$

$s_{t,g}$ – *коэффициент наращения постоянной ренты постнумерандо.*

Аналогично разрабатывается планы и для погашения займа не единичными *годовыми выплатами, а несколькими платежами в каждом году.*

Альтернативная постановка задачи может возникнуть на стадии разработки условий займа. Ее решение позволяет определить срок займа (погашения основной суммы долга) и корректировки условий для сбалансированности платежей.

Срок платежей находится как срок постоянной ренты. Если выплаты раз в год, т.е. рента постнумерандо, то зависимость такова:

$$n = \frac{-\ln(1 - \frac{D_0}{Y} g)}{\ln(1+g)}. \tag{7.20}$$

Решение существует, когда $D_0/y*g < 1$, расчетное значение «n» получается дробным. Его округляют до ближайшего целого наименьшего числа. Но тогда план погашения не будет сбалансированным. Ликвидация дисбаланса платежей возможна двумя способами:

- определение нового значения У;
- компенсация остатка долга разовым платежом.

Если погасительные платежи и начисленные проценты выплачиваются p раз в году, то расчетное число периодов погашения займа равно:

$$n = \frac{-\ln(1 - \frac{D_0}{Y} g)}{\ln(1 + g/p)}. \tag{7.21}$$

Переменные расходы по займу

Для должника не всегда удобно, когда У – постоянная величина. Погашение долга может быть связано с поступлением средств из разных источников, срочные выплаты в этом случае образуют ряд, члены которого либо задаются заранее (график платежей), либо следуют некоторому формальному закону – функции.

Приравняв современную стоимость такой ренты к сумме первоначального долга, находим:

$$Y = D_0 * \frac{q - (1+g)}{\left(\frac{q}{1+g}\right)^n - 1}, \qquad (7.22)$$

q – заданный годовой темп прироста ;

g – процентная ставка по займу.

Далее рассчитываются суммы, идущие на погашение основного долга, и формируется график погашения займа.

Когда размеры срочной выплаты связывают с ожидаемыми поступлениями средств и задаются в виде графика погашения, то размер последней срочной выплаты определяется как сумма остатка долга на начало последнего периода.

В таблице 7.1 представлена схема разработки плана погашения долгосрочной задолженности. Такой таблицей можно пользоваться при любом методе погашения долгосрочной задолженности, только в одном случае расходы по займу будут постоянной величиной, в другом – сумма погашения долга и т.д.

Таблица 7.1

Схема расчета показателей плана погашения

Год	Остаток долга на начало года	Расходы по займу	%	Погашение долга	Долг на конец года
1	D_0	y_1	D_0*g	y_1-D_0*g	$D_0*(1+g)-y_1$
2	D_1	y_2	D_1*g	y_2-D_1*g	$D_1*(1+g)-y_2$
...	...	...	...	...	...
n	D_{n-1}	y_n	$D_{n-1}*g$	$y_n-D_{n-1}*g$	$D_{n-1}*(1+g)-y_n$

7.4. Льготные кредиты и займы

Иногда долгосрочные кредиты и займы выдаются по тем или иным причинам под льготные для заемщика условия. Низкая процентная ставка, большой срок кредита и льготный период дают должнику существенную выгоду. Кредитор в этих условиях несет некоторые потери, т.к. он мог бы инвестировать деньги на более выгодных условиях.

Проблема выдачи таких кредитов связана с оценкой **грант-элемента** – условной потери заимодавца (кредитора), которая связана с более низкой ставкой процента, чем ставка обычного кредитного рынка.

Абсолютный грант-элемент рассчитывается как разность номинальной суммы займа и современной величины платежей по погашению займа.

Ключевой момент – выбор подходящей ставки процента для расчета современной стоимости платежей. Точных рекомендаций нет, обычно используют превалирующую на рынке долгосрочных кредитов ставку.

$$W = D - A, \tag{7.23}$$

где D – сумма займа;

A – современная величина платежей;

W –абсолютный грант-элемент.

Относительный грант-элемент:

$$w = W/D = 1\text{-}A/D. \tag{7.24}$$

Предположим, что займ выдан на n лет под ставку g. На рынке аналогичные займы выдаются под ставку i.

Тогда срочная выплата:

$$Y = D/\,a_{n.g}\,. \tag{7.25}$$

Современная величина всех выплат должника равна:

$$A = Ya_{n.i}\,, \tag{7.26}$$

$$W = D - Ya_{n.\,i} = D(1\text{-}\,a_{n.i}\,/a_{n..g}), \tag{7.27}$$

$$w = 1\text{-}\,a_{n.i}\,/a_{n.g}\,, \tag{7.28}$$

при i>g.

Наличие льготного периода увеличивает грант-элемент. Если в льготном периоде должник выплачивает проценты, то современная стоимость поступлений по долгу равна сумме двух слагаемых – современной величины процентных платежей в льготном периоде и современной величины срочных выплат в оставшееся время займа:

$$A = Dg^*a_{L.i} + Ya_{n\text{-}L.i}{}^*\upsilon^{L}, \tag{7.29}$$

$$Y = D/\,a_{n.g}\,, \tag{7.30}$$

L – продолжительность льготного периода.

После преобразования получаем:

$$w = 1\text{-}A/D = 1\text{-}(\,a_{n\text{-}L.i}/\,a_{n\text{-}L.g}{}^*\,\upsilon^{L} + g^*\,a_{L.i}). \tag{7.31}$$

υ – дисконтный множитель.

Возможен еще один вариант: в льготном периоде проценты начисляются, но не выплачиваются, а присоединяются к основному долгу, который погашается в течение n-L лет.

Условия такого займа более льготные для должника, чем при последовательной выплате процентов.

Срочные выплаты и их современная стоимость в этом случае равны:

$$Y = \frac{D(1+g)^L}{a_{n-L;g}}, \tag{7.32}$$

$$A = Y a_{n-L;i}, \tag{7.33}$$

$$\Rightarrow w = 1 - \frac{G}{D} = 1 - \frac{a_{n-L;i}}{a_{n-L;g}} * \left(\frac{1+g}{1+i}\right)^L. \tag{7.34}$$

Как уже упоминалось выше, грант-элемент – условная обобщающая характеристика льготности займа, потерь заимодавца и выигрыша должника. Сумма грант-элемента существенно зависит от уровня процентной ставки, принятой для ее определения.

7.5. Беспроцентный займ

Беспроцентный займ – это предельный случай льготного займа, выдача которого связана с потерями, которые определяют, полагая, что соответствующие средства можно было бы разместить на рынке под i процентов. Например, при пятнадцатилетнем сроке беспроцентного займа и рыночной ставке 10% кредитор теряет почти 50% от суммы долга.

Может существовать льготный период, в течение которого погасительные платежи не поступают (отсрочка погашения).

Если займ погашается равномерно каждый год суммой D/n постнумерандо, то современная стоимость погасительных платежей равна:

$$A = D/n * a_{ni}. \tag{7.35}$$

Относительный грант-элемент (относительная величина потерь):

$$w = 1 - A/D = 1 - a_{ni}/n. \tag{7.36}$$

С учетом возможной отсрочки

$$w = 1 - \frac{a_{n-L;i}}{n} * v^L. \tag{7.37}$$

7.6. Реструктурирование займов

Реструктуризация займа представляет собой пересмотр условий действующего обязательства из-за ухудшения финансового состояния заемщика. Ведь лучше потерять кое-что, чем все.

Варианты реструктуризации:

- *прямое сокращение суммы долга;*
- уменьшение процентной ставки;
- *пересмотр сроков и порядка выплат процентов и сумм погашения основного долга.*

На практике одновременно может быть применено несколько из указанных способов. Например, известны такие случаи, когда к одной части обязательства применяли сокращение суммы основного долга, к другой – снижение процентной ставки. Какой бы способ реструктурирования ни был принят, следствием является уменьшение современной стоимости выплат. Поэтому выбор варианта *реструктурирования заключается в сравнении соответствующих оценок (совре*менных стоимостей при соответствующей ставке).

Основные термины и понятия:

План погашения займа
Переменные расходы по займу
Абсолютный грант-элемент
Относительный грант-элемент
Реструктуризация займа
Срочная выплата
Погасительный фонд
Льготный период
Беспроцентный займ

Вопросы для обсуждения:

1. Приведите алгоритм разработки плана погашения займа.
2. Какими взносами выгоднее для должника формировать погасительный фонд: постоянными или переменными?
3. Как можно определить расходы по погашению основного долга за определенный год, при условии, что взносы в фонд – изменяющиеся?
4. *Разработайте схему погашения долга в рассрочку.*
5. Что такое грант–элемент? Чем относительный грант–элемент отличается от абсолютного грант–элемента?
6. При каких условиях может быть предоставлен беспроцентный займ?
7. Что означает фраза: «Лучше потерять кое-что, чем все»?

Примеры решения задач:

1. *Долгосрочный займ 1 млн. руб. гасится последовательно равными сроч*ными выплатами в течение 5 лет (постнумерандо). Ставка процента по кредиту - 10%. Разработать схему погашения займа.

Решение:

1) Определим сумму постоянной срочной выплаты (коэффициент приведения $a_{5;10}$ определяется по формуле нахождения современной стоимости годовой ренты постнумерандо, см. тему 4):

$У = D/a_{n*g}$, $1000000/a_{5;10}$=1000000/3,790787=263 797 руб.,

исходя из условий погашения займа, срочная выплата будет постоянной на протяжении всего срока погашения;

2) Определим сумму первого погасительного платежа:

*$d_1 = У - D_0 * g$,   263 797 -1 000 000*0,1=163 797 руб.,*

*$D_0 * g$ – это сумма процентов, которая входит в состав срочной выплаты. Для первого года сумма процентов составит 100 тыс. руб. (1000000*0,1);*

3) Остаток долга после первого погашения (на начало второго года) составит:

$D_1 = D_0 - d_1$,   1 000 000-163 797=836 203 руб.

Аналогичным образом делаются расчеты до конца срока погашения.

План погашения долга представим в таблице:

Год	*Остаток долга на начало года (D)*	*Расходы по займу (У)*	*Погашение долга (d)*	*Сумма процентов (D*g)*
1	*1 000 000*	*263 797*	*163 797*	*100 000*
2	*836 203*	*263 797*	*180 177*	*83 620*
3	*656 026*	*263 797*	*198 195*	*65 603*
4	*457 831*	*263 797*	*218 014*	*45 783*
5	***239 816***	*263 797*	***239 816***	*23 982*

Если расчеты сделаны верно, то остаток долга на начало последнего года должен быть равен сумме погашения долга за последний год (допускается небольшое отклонение вследствие округления).

2. Льготный займ выдан на 10 лет под 3,8% годовых. Долг погашается равными срочными выплатами. Рыночная ставка по аналогичным кредитам – 8%, исходная сумма займа равна 10 млн. руб. Определить условные потери кредитора в абсолютном и относительном выражении.

Решение: относительный грант-элемент равен:

$w = 1 - a_{n,i}/a_{n,g}$, $1 - a_{10;8}/a_{10;3,8}$=0,1809,

(коэффициенты приведения определяются по формуле нахождения современной стоимости годовой ренты постнумерандо, см. тему 4);

абсолютный грант-элемент находим по формуле:

$W = D^*(1 - a_{n,i}/a_{n,g})$, $\quad 10 * 0{,}1809 = 1{,}809$ *млн. руб.*

Другими словами, условные потери кредитора составят 1,809 млн. руб., или примерно 18% от общей суммы кредита.

Тема 8. *Ипотечные ссуды. Потребительский кредит*

8.1. Виды ипотечных ссуд
8.2. Расчеты по ипотечным ссудам
8.3. Наращение и выплата процентов в потребительском кредите

8.1. Виды ипотечных ссуд

Ипотека – ссуда под залог недвижимости. В такой сделке владелец имущества получает ссуду у залогодержателя и в качестве обеспечения возврата долга *передает последнему право на преимущественное удовлетворение своего требования* из стоимости заложенного имущества в случае отказа от погашения или неполного погашения задолженности. Сумма ссуды обычно меньше оценочной стоимости закладываемого имущества. Характерной особенностью ипотечных ссуд является длительный срок погашения.

Существует несколько видов ипотечных ссуд, различающихся в основном методами погашения задолженности. Большинство видов являются вариантами стандартной или типовой ипотечной ссуды, когда заемщик получает от кредитора некоторую сумму под залог недвижимости и погашает долг вместе с процентами, равными, обычно ежемесячными взносами.

Модификации стандартной схемы ипотеки нацелены на повышение ее гибкости в учете потребностей как должника, так и кредитора. Проанализируем некоторые схемы ипотек.

Ссуды с ростом платежей – предусматривают постоянный рост расходов *по обслуживанию долга в первые годы. В оставшееся время погашение* производится постоянными взносами. Вариантом такой ипотеки является ссуда, погашение которой происходит по согласованному графику: каждые 3-5 лет увеличивается сумма взносов.

Ссуда с льготным периодом – предполагается наличие льготного периода, в течение которого выплачиваются только проценты по долгу. Такая схема в наибольшей мере сдвигает во времени финансовую нагрузку должника.

Ссуды с периодическим изменением процентной ставки – стороны каждые 3-5 лет пересматривают уровень процентной ставки, т.е. происходит периодически возобновляемое среднесрочное кредитование при долгосрочном погашении всей задолженности.

Ипотека с переменной процентной ставкой – уровень ставки «привязывается» к какому-либо распространенному финансовому показателю или индексу. Пересмотр ставки обычно осуществляется по полугодиям, при этом предусматривается верхняя и нижняя границы разовых коррективов.

8.2. Расчеты по ипотечным ссудам

Основной задачей при анализе ипотек является разработка планов погашения долга, определение суммы остатка задолженности на любой момент процесса погашения.

Наиболее распространенной является ссуда, условия которой предполагают равные взносы должника, взносы ежемесячные постнумерандо или пренумерандо. В договоре обычно устанавливается ежемесячная процентная ставка, реже номинальная годовая.

Поскольку погасительные платежи представляют собой постоянную ренту, можно воспользоваться методикой разработки плана погашения займа равными срочными уплатами (см. тему 7). Приравняв современную величину срочных уплат к сумме ссуды, находим для месячных взносов постнумерандо:

$$D=R*a_{N;i}, \tag{8.1}$$

где D – сумма ссуды;

N – общее число платежей, $N=12n$ (n- срок погашения в годах);

R – месячная сумма взносов.

Искомая величина взноса составит:

$$R=\frac{D}{a_{N;i}}=D*c. \tag{8.2}$$

Величину $c=\frac{1}{a_{N;i}}$ называют коэффициентом рассрочки.

Для ренты пренумерандо:

$$R=\frac{D}{a_{N;i}}(1+i). \tag{8.3}$$

Найденная величина срочной уплаты является базой для разработки плана погашения долга. Согласно общепринятому правилу из этой суммы прежде всего выплачиваются проценты, а остаток идет на погашение долга.

При выдаче ссуды под залог для обеих сторон важно знать сумму погашенного долга и его остаток на любой промежуточный момент.

Для стандартной ипотеки:

$$d_t=d_{t-1}(1+i)=d_1(1+i)^{t-1}, \tag{8.4}$$

где d_t – сумма погашения долга, t – порядковый номер месяца, i – месячная ставка процента.

Остаток долга на начало месяца:

$$D_{t+1}=D_t-d_t, \quad t=1,....,12n. \tag{8.5}$$

Последовательные суммы погашения долга представляют собой геометрическую прогрессию с первым членом d_1 и знаменателем $(1+i)$, причем

$$d_1=R-D*i. \tag{8.6}$$

Другими словами, общая сумма погашения от первой выплаты до t составит:

$$W_t=d_1*s_{t;i}. \tag{8.7}$$

Остаток долга на начало месяца:

$$D_{t+1}=D_1-W_t\,. \tag{8.8}$$

8.3. Наращение и выплата процентов в потребительском кредите

Потребительский кредит - займ, предоставляемый банком, финансовой компанией или розничным торговцем отдельному индивидууму на потребительские цели.

Существуют различные способы погашения потребительского кредита. *Один из способов предусматривает начисление процентов на всю сумму кредита* и присоединение их к основному долгу в момент открытия кредита. Погашение долга с процентами производится частями, обычно равными суммами на протяжении всего срока кредита, т.е. наращенная сумма долга равна:

$$S=P(1+ni),$$

а величина разового платежа составит

$$R=S/nm, \tag{8.9}$$

где n – срок кредита в годах, m – число платежей в году.

При таком способе погашения кредита фактическая процентная ставка оказывается больше ставки, предусмотренной при оформлении кредита, поскольку величина долга с течением времени уменьшается, а проценты уже начислены на первоначальную величину кредита.

При досрочном погашении долга возникает необходимость определения остатка задолженности на некоторый промежуточный момент времени срока кредита. При этом необходимо разбить величину R на проценты и сумму, идущую на погашение основного долга. В данном случае можно воспользоваться несколькими методами. Метод равномерного распределения выплат процентов предполагает деление расходов на постоянные суммы процентов и погасительные платежи:

$$R = R_1 + R_2 = \frac{Pi}{m} + \frac{P}{nm}, \tag{8.10}$$

где P – сумма основного долга без процентов (цена товара);

R_1 и R_2 – проценты и размер погашения основного долга.

Другой метод, называемый «правилом 78», заключается в следующем: сумма порядковых номеров месяцев в году равна 78, предположим, что срок кредита равен году. Согласно «правилу 78», часть первого погасительного платежа пойдет на выплату $\frac{12}{78}$ от общей начисленной величины процентов (т.е. $\frac{12}{78}$*I), а оставшаяся часть погасительного платежа (R-$\frac{12}{78}$*I) пойдет в счет выплаты основного долга. Часть второго погасительного платежа пойдет на выплату $\frac{11}{78}$ от общей начисленной величины процентов ($\frac{11}{78}$*I), а оставшаяся часть платежа (R-$\frac{11}{78}$*I) пойдет в счет выплаты основного долга. Для третьего платежа надо взять дробь $\frac{10}{78}$ и т.д., последняя уплата процентов будет равна $\frac{1}{78}$. Доля процентов линейно убывает, а сумма списания основного долга последовательно увеличивается. Для годового срока находим:

$$R1 = \frac{t}{78} Pi, \tag{8.11}$$

$$R_2 = R - R_1 = \frac{P(1+i)}{12} - \frac{t}{78} Pi, \qquad t=12,\ 11,\ \ldots,1. \tag{8.12}$$

Если кредит выдан на срок N месяцев, последовательные номера месяцев в обратном порядке представляют собой числа $t= N, N-1,\ldots,1$, а сумма этих чисел находится как

$$Q = \sum_{1}^{N} t = \frac{N(N+1)}{2}. \tag{8.13}$$

В итоге проценты и размер погашения основного долга составят:

$$R_1 = \frac{t}{Q} Pni, \tag{8.14}$$

$$R_2 = R - \frac{t}{Q} Pni\,, \qquad (8.15)$$

из чего следует, что в каждом месяце выплаты процентов сокращаются на величину Pni / Q, на такую же сумму увеличиваются суммы списания основного долга.

Схема с убывающей величиной процентного платежа играет двоякую роль. Во-первых, она соответствует логике ссудо-заемных операций: поскольку с течением времени происходит погашение основной суммы долга, постольку и сумма процентов, начисленных на уменьшаемый остаток непогашенного долга, должна снижаться. Во-вторых, она в определенной степени страхует кредитора на случай досрочного погашения долга, если возможность этого предусмотрена кредитным договором. При досрочном погашении заемщик понесет определенный убыток, поскольку большую часть процентов он уже заплатит в начале срока кредитования. Предельным случаем такой политики является ситуация, когда заемщик получает кредит за минусом предусмотренных договором процентов.

Основные термины и понятия:

Ипотека	Коэффициент рассрочки
Ссуда с ростом платежей	Потребительский кредит
Ссуда с льготным периодом	«Правило 78»
Ссуда с изменением процентной ставки	Стандартная ипотека
Ипотека с переменной процентной ставкой	

Вопросы для обсуждения:

1. Что представляет собой стандартная ипотечная ссуда?
2. Виды типовой ипотеки.
3. Сравните методы погашения задолженности по различным видам ипотек.
4. На каких условиях может выдаваться потребительский кредит?
5. Как происходит начисление процентов в потребительском кредите?
6. Какая схема погашения кредита выгоднее для должника? Поясните на примере.
7. Объясните «правило 78». Какие преимущества дает этот метод кредитору? Какие возможности предоставляются заемщику?
8. Приведите алгоритм составления плана погашения кредита.

Задачи для самостоятельного решения:

1. На покупку квартиры выдана ссуда в размере 200 тыс. руб. сроком на 10 лет. Погашение кредита осуществляется ежемесячно в конце месяца. Номинальная годовая ставка составляет 15%. Определите ежемесячные расходы должника и разработайте план погашения долга. Найдите остаток долга на конец 80-го месяца.

2. Потребительский кредит выдан на 2 года в сумме 25 тыс. руб. при разовом начислении процентов по ставке 28% годовых. Долг погашается ежемесячно. Выплата процентов распределяется равномерно во времени. Приведите план погашения долга.

3. Товар с ценой 3 тыс. руб. продается в кредит на 2 года под 12% годовых с ежеквартальными равными погасительными платежами, начисляются простые проценты. Определите долг с процентами, проценты и величину разового погасительного платежа.

4. Разработайте план погашения долга на основании условий задачи 3 и «правила 78». На какую сумму ежемесячно сокращается размер выплачиваемых процентов?

Тема 9. Страховые аннуитеты. Личное страхование

9.1. Финансовая эквивалентность в страховании
9.2. Стоимость страхового аннуитета
9.3. Страхование жизни

9.1. Финансовая эквивалентность в страховании

На практике нередко возникают ситуации, когда осуществление тех или иных выплат зависит от наступления события, носящего случайный характер. В данном случае используются условные ренты, называемые страховыми аннуитетами. Заранее число платежей в страховых аннуитетах, а часто и срок, остаются неизменными.

Страхование – финансовое обеспечение от возможного ущерба путем взносов (единовременных или периодических) специальному учреждению (*страховщику*), которое выплачивает денежное возмещение в случае такого ущерба. *Страхователь* – тот, кто страхуется, физическое или юридическое лицо. Сумма, которую страхователь уплачивает вперед страховщику в соответствии с договором, называется *премией (P)*, или *страховым взносом*. Сумма, выплачиваемая страховщиком страхователю при наступлении страхового случая, называется *страховым возмещением* (компенсацией). Денежная сумма, на которую фактически застраховано имущество, жизнь и т.д., называется *страховой суммой (S)*. Она определяется по согласованию сторон и представляет собой максимальную величину выплаты страхового возмещения по убыткам страхователя. Чем больше уровень страховой суммы, тем больше страховой взнос.

Сделка страхования оформляется в виде специального документа – *страхового полиса*, удостоверяющего факт страхования и дающего право на получение страхового возмещения в результате наступления страхового случая. В типовом страховом полисе оговариваются следующие условия страхования: наименование страховщика, наименование страхователя, объект страхования, перечень страховых случаев, страховая сумма, страховая премия, начало и конец страхования срок выплаты страховой компенсации, особые условия.

При страховании все расчеты принято производить для страховой суммы, равной единице. Величину страхового взноса с единицы страховой суммы называют *тарифной ставкой*. Тариф представляет собой *брутто-ставку*, состоящую из *нетто-ставки*, предназначенной для выплаты страховых сумм и так называемой *нагрузке* к нетто-ставке, служащей для покрытия всех расходов страховщика, связанных с осуществлением страхования, и обеспечения рентабельности его работы. Расчеты, производимые в финансовой операции по страхованию, называются страховыми, или *актуарными*.

9.2. Стоимость страхового аннуитета

Если вероятность наступления страхового события q заранее известна (на основании прошлого опыта, по аналогии и т.д.), то теоретически, без учета всех прочих факторов, премия P определяется как

$$P=S^*q. \tag{9.1}$$

Приведенное равенство иллюстрирует принцип финансовой эквивалентности обязательств страхователя и страховщика. Определяя нетто-премию, мы фактически получаем теоретическую стоимость страхования. Величина брутто-премии зависит от структуры нагрузки и находится путем увеличения нетто-премии.

В основе любого вида страхования заложена идея распределения убытков одного лица, с которым в данный момент произошел страховой случай, на большее число участников, с которыми в это время такой случай не произошел, т.е. действует *принцип солидарной ответственности страхователей*. Страховые суммы выплачиваются из страхового фонда, образованного взносами всех участников страхования. При этом приведенная стоимость страховых взносов должна быть равна приведенной стоимости ожидаемых страховых выплат за весь срок действия договора. Это обеспечивает сбалансированность взаимных обязательств страховщика и страхователя.

9.3. Страхование жизни

При осуществлении финансовых операций по страхованию жизни опираются на статистические данные дожития до того или иного возраста. Эти данные представлены в так называемых *таблицах смертности*, представляющих собой числовую модель процесса вымирания по возрастам некоторой абстрактной совокупности людей. Такая таблица показывает, как последовательно с увеличением возраста уменьшается эта совокупность, достигая нуля сразу после некоторого предельного возраста, и составляется на основании данных демографической статистики населения (в таблице 9.1 представлен фрагмент таблицы смертности).

Таблица 9.1

Фрагмент таблицы смертности

x	l_x	q_x	d_x
18	100 000	0,00149	149
19	99 851	0,00173	173
20	99 678	0,99196	195
...			
30	96 991	0,00381	370
...			
35	94 951	0,00487	462
...			
40	92 327	0.00708	654
...			
50	83 640	0,01409	1178
...			
60	68 505	0,02871	1967
...			
70	45 654	0,05691	2598
...			
80	19 760	0,11672	2306

Основной показатель таблицы смертности – число людей l_x в возрасте ровно x лет, оставшихся в живых из первоначальной совокупности l_0, обычно равной 100 тыс. человек. Начальный возраст и первоначальное количество людей в таблице могут быть любыми, это не влияет на результаты актуарных расчетов. Полные таблицы смертности содержат показатели для каждого возраста с интервалом в 1 год.

Величины l_x определяются расчетным путем на основании заданных вероятностей смерти (q_x), d_x - число умерших за год в каждой возрастной группе

$$d_x=l_x*q_x, \tag{9.2}$$

$$l_{x+1}=l_x-d_x, \tag{9.3}$$

вероятность умереть в течение года, дожив до возраста x лет:

$$q_x=d_x / l_x, \tag{9.4}$$

вероятность прожить еще год для человека в возрасте x равна

$$p_x=1-q_x=\frac{l_{x+1}}{l_x}, \tag{9.5}$$

вероятность прожить от возраста x до $x+n$:

$$ {}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}, \tag{9.6} $$

вероятность умереть в течение следующих n лет:

$$ {}_nq_x = 1 - {}_np_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} = \frac{1}{l_x}\sum_{j=x}^{x+n-1} d_j . \tag{9.7} $$

Представленная таблица смертности достаточна для простых видов личного страхования – страхования на дожитие и страхования жизни.

Для сокращения записи страховых аннуитетов и упрощения расчетов применяют так называемые коммутационные функции (числа). Стандартные коммутационные функции делятся на две группы. В основу первой положены числа доживающих до определенного возраста, вторых – числа умерших. Основными в первой группе являются функции D_x и N_x:

$$ D_x = l_x * v^x , \tag{9.8} $$

$$ N_x = \sum_{j=x}^{\omega} D_j , \tag{9.9} $$

где, v^x - дисконтный множитель по принятой ставке процентов;
ω - предельный возраст, учитываемый в таблице смертности.

Наиболее важными коммутационными функциями второй группы являются C_x и M_x:

$$ C_x = d_x * v^{x+1} , \tag{9.10} $$

$$ M_x = \sum_{j=x}^{\omega} C_j . \tag{9.11} $$

Страховые организации разрабатывают таблицы коммутационных функций с учетом принятых в них норм доходности.

Страхование на чистое дожитие – простейший случай личного страхования и представляет собой страхование определенной суммы денег на определенный срок. Страховая сумма выплачивается только в том случае, если страхователь во время действия договора не умирает.

Для определения размера нетто-премии найдем математическое ожидание суммы страховой выплаты, дисконтированной на срок страхования:

$$ {}_nE_x = S * \frac{l_{x+n}}{l_x} * v^n , \tag{9.12} $$

где $_nE_x$ – размер нетто-премии;

S – страховая сумма;

l_{x+n} - количество страхователей, доживших до возраста $x+n$;

l_x – количество страхователей, доживших до возраста x.

Влияние процентной ставки здесь очевидно – чем она выше, тем меньше страховая премия.

Другой вид страхования – пожизненное страхование, когда страховая сумма выплачивается в случае смерти застрахованного. Нетто-премия равна современной стоимости страхового аннуитета или математическому ожиданию суммы дисконтированных выплат:

$$A_x = \frac{d_x}{l_x} v * S + \frac{d_x + 1}{l_x} \cdot v^2 * S ... + \frac{d_\omega}{l_x} v^{\omega - x} * S. \tag{9.13}$$

Применив коммутационную функцию M_x, имеем:

$$A_x = \frac{M_x}{D_x} S. \tag{9.14}$$

На практике пожизненное страхование встречается достаточно редко, как правило, заключаются договоры страхования жизни на срок и страховая сумма выплачивается лишь в случае смерти застрахованного до срока окончания договора.

$$_nA_x = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} S. \tag{9.15}$$

Срочное страхование жизни и страхование на дожитие на тот же срок могут объединяться в одном договоре. Такой вариант страхования называют смешанным страхованием жизни. Страховая сумма выплачивается либо страхователю в случае его дожития до окончания срока договора, либо наследникам страхователя в случае его смерти раньше срока договора.

$$_nE_x + {_nA_x} = \frac{D_{x+n} + M_x - M_{x+n}}{D_x} S. \tag{9.16}$$

Основными факторами, определяющими стоимость страхового аннуитета, являются: демографический фактор, отражаемый таблицей смертности, установленная норма доходности, длительность отсрочки выплат и срок аннуитета.

Основные термины и понятия:

Страхование

Страховая премия

Страховое возмещение

Страховой полис

Нетто-ставка

Таблицы смертности

Коммутационные числа

Страхование на дожитие

Тарифная ставка	Пожизненное страхование
Принцип солидарной ответственности	Смешанное страхование

Вопросы для обсуждения:

1. Что представляют собой страховые аннуитеты?
2. *Опишите алгоритм взаимодействия страхователя и страховщика.*
3. Как и для чего разрабатываются таблицы смертности?
4. На примерах объясните взаимосвязь коммутационных функций.
5. Какие факторы определяют стоимость страхового аннуитета?
6. Виды личного страхования. Приведите примеры.
7. Как процентная ставка дисконтирования влияет на размер страховой премии?

Задачи и ситуации:

1. Какова вероятность мужчине в возрасте 40 лет прожить еще 10 лет?
2. Определить стоимость страхового договора на дожитие на сумму 100 тыс. руб. сроком на 20 лет для мужчин в возрасте 30 лет. Годовая норма доходности – 9%.
3. Определить размер нетто-ставки при страховании на дожитие до 60 лет мужчины в возрасте 50 лет в условиях применения сложной процентной ставки 5% годовых.
4. Найти величину премии в виде доли от страховой суммы для сорокалетнего мужчины при пожизненном страховании жизни; с ограничением срока страхования двадцатью годами.
5. Необходимо найти стоимость страхования на дожитие до 60 лет мужчин в возрасте 40 лет, ставка – 10% годовых. Число застрахованных – 1000 человек, страховая сумма равна 1 тыс. руб. Определите количество лиц, доживших до 60 лет, общую сумму выплат страховщика и общую сумму премии, полученную страховщиком за 20 лет. Соблюдается ли в данных условиях принцип солидарной ответственности страхователей?

Тема 10. Финансовый анализ операций с облигациями

10.1. Виды облигаций, их классификация

10.2. Измерение доходности облигаций

10.3. Определение текущей курсовой стоимости основных видов облигаций

10.1. Виды облигаций, их классификация

Под облигацией понимается ценная бумага, свидетельствующая о том, что ее держатель предоставил заем эмитенту этой бумаги. Облигации выпускаются *при необходимости привлечения значительных денежных средств* государством, финансовыми институтами или компаниями и предприятиями. Облигации являются ценными бумагами с фиксированным доходом, владелец облигации регулярно получает проценты по купонам и в конце срока выкупную цену.

Основные параметры облигации: номинальная цена (номинал), выкупная цена, дата погашения, норма доходности (купонная процентная ставка), даты выплат процентов. Выплаты процентов производятся ежегодно, по полугодиям, поквартально или в конце срока. Периодическая выплата по облигациям осуществляется по купонам – вырезным талонам с напечатанной на нем цифрой купонной ставки.

В практике применяются облигации различных видов, их можно классифицировать по следующим признакам:

1. По методу обеспечения:

- государственные и муниципальные облигации, выплаты по которым обеспечиваются гарантиями государства или муниципалитета;
- облигации частных корпораций – обеспечиваются залогом имущества, передачей прав на недвижимость, доходами от различных программ и проектов;
- облигации частных корпораций без специального обеспечения.

2. По сроку:

- облигации с фиксированной датой погашения;
- без указания даты погашения или бессрочные, т.е. облигации могут быть выкуплены в любой момент.

3. По способу выкупа облигации:

- разовым платежом;
- распределенными во времени погашениями оговоренных долей номинала;
- последовательным погашением доли общего количества облигаций, соответствующие облигации называются серийными, часто этот метод погашения осуществляется с помощью лотерей – лотерейные или тиражные займы.

4. По методу выплаты дохода:

- выплачиваются только проценты, срок выкупа не оговаривается;
- выплата процентов не предусматривается – облигации с нулевым купоном;
- проценты выплачиваются вместе с номиналом в конце срока;
- периодически выплачиваются проценты, а в конце срока – номинал или выкупная цена (наиболее преобладающий вид облигаций).

Облигации являются важным объектом долгосрочных инвестиций. С момента их эмиссии и до погашения они обращаются на кредитно-денежном рынке по рыночным ценам. Рыночная цена в момент выпуска может быть равна номиналу, ниже номинала (с дисконтом) и выше номинала (с премией). Премия

– это «переплата» за будущие высокие доходы, а дисконт – скидка с цены, связанная с низкими доходами от облигации.

Различают два вида рыночных цен: полная цена, которая включает не только цену облигации, но и сумму процентов за период после последней их выплаты и до момента продажи; чистая цена – цена за вычетом суммы всех начисленных процентов. В расчетах фигурирует именно чистая цена.

Поскольку номиналы у разных облигаций существенно различаются между собой, то возникает необходимость в сопоставимом измерителе рыночных цен. Таким показателем является курс – цена одной облигации в расчете на 100 денежных единиц номинала:

$$K = \frac{P}{N}100, \tag{10.1}$$

где K – курс облигации, P – рыночная цена, N – номинал облигации.

Доход от облигации состоит из двух основных слагаемых: периодически получаемых по купонам процентов; разности между номиналом и ценной приобретения, если последняя меньше номинала.

10.2. Измерение доходности облигаций

Доходность облигаций характеризуется несколькими показателями: купонная, текущая и полная доходности. Купонная доходность определена при выпуске облигации. Текущая доходность характеризует отношение поступлений по купонам к цене приобретения облигации. Наиболее информативным является показатель полной доходности, учитывающий оба источника дохода. Полная доходность измеряет реальную эффективность инвестиций в облигацию для инвестора в виде годовой ставки сложных процентов.

Облигации бессрочные с периодической выплатой процентов

Текущая доходность определяется по формуле:

$$i_t = \frac{gN}{P} = \frac{g}{K}100, \tag{10.2}$$

где g – объявленная норма годового дохода (купонная ставка процента).

Данная формула используется и в том случае, если по купонам выплата производится p раз в году , каждый раз по ставке g/p.

Поскольку доход по купонам является единственным источником текущих поступлений от данного вида облигации, то полная доходность у рассматриваемых облигаций равна текущей в случае, когда выплаты по купонам ежегодные, т.е. $i=i_t$. Если же проценты выплачиваются несколько раз в году (g/p), то полная доходность равна:

$$i = \left(1 + \frac{i_L}{p}\right)^p - 1. \qquad (10.3)$$

Облигации без выплаты процентов

Данный вид облигации обеспечивает ее владельцу в качестве дохода разность между номиналом и ценой приобретения. Курс такой облигации всегда меньше 100. Полную доходность найдем, приравняв современную стоимость номинала цене приобретения:

$$Nv^n = P \text{ или } v^n = \frac{P}{N} = \frac{K}{100}, \qquad (10.4)$$

где n – срок до выкупа облигации.

$$i = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{K}{100}}} - 1 \quad . \qquad (10.5)$$

Облигации с выплатой процентов и номинала в конце срока

Проценты на такие облигации начисляются за весь срок и выплачиваются одной суммой вместе с номиналом. Купонного дохода нет, поэтому текущую доходность условно можно считать нулевой, т.к. соответствующие проценты получают в конце срока. Приравняем современную стоимость дохода цене облигации:

$$(1+g)^n Nv^n = P \text{ или } \left(\frac{1+g}{1+i}\right)^n = \frac{K}{100}, \qquad (10.6)$$

$$i = \frac{1+g}{\sqrt[n]{\frac{K}{100}}} - 1. \qquad (10.7)$$

Если курс облигации меньше 100, то $i>g$.

Облигации с периодической выплатой процентов и погашением номинала в конце срока

Этот вид облигаций является наиболее распространенным и характеризуется всеми тремя показателями доходности. Текущая доходность рассчитывается по формуле, полученной для первого вида облигаций. Чтобы рассчитать полную доходность, необходимо современную стоимость всех поступлений приравнять цене облигации, получится постоянная рента постнумерандо, и для того, чтобы найти ставку I, необходимо воспользоваться интерполяцией или каким-либо итерационным методом. В финансовой литературе иногда рекомендуют метод приближенной оценки, по которому получаем:

$$i = \frac{gN + (N-P)/n}{(P+N)/2} = \frac{g + \left(1 - \frac{K}{100}\right)/n}{\left(1 + \frac{K}{100}\right)/2}. \qquad (10.8)$$

В приведенной формуле средний годовой доход от облигации соотносится со средней ее ценой, чем больше курс отличается от 100, тем больше погрешность.

Следует отметить, что доход от облигаций обычно ниже, чем от других видов ценных бумаг, в то же время он более надежен, т.к. в меньшей степени зависит от конъюнктурных колебаний рынка, чем, например, доход от акций. Поэтому если степень надежности предпочтительнее величины доходности инвесторы предпочитают вкладывать средства именно в облигации.

10.3. Определение текущей курсовой стоимости основных видов облигаций

Оценивание займов и облигаций представляет собой один из важнейших видов количественного финансового анализа, имеющего различные практические приложения. Поскольку займы часто реализуются посредством выпуска облигаций, то метод их оценивания рассмотрим применительно к их текущей курсовой стоимости с позиции инвестора.

Оценивание заключается в определении капитализированной суммы доходов от облигации, т.е. суммы денег, которая в финансовом отношении эквивалентна этим доходам с учетом сроков их выплат. Эта сумма равна современной стоимости доходов при некоторой заданной величине процентной ставки. В зависимости от постановки задачи – это существующая или ожидаемая ставка денежного рынка, или ставка помещения. Другими словами, оценивание облигаций является задачей, обратной определению полной доходности.

Методы оценивания различных видов облигаций рассмотрим в той последовательности, которая была принята при определении их доходности.

Облигации бессрочные с периодической выплатой процентов

Напомним, что процесс выплаты процентов здесь можно рассматривать как вечную ренту. Рыночная цена такой облигации будет определяться по формуле:

$$P = \frac{gN}{i}, \qquad (10.9)$$

а курс такой облигации прямо пропорционален норме купонного дохода и обратно пропорционален рыночной ставке:

$$K = \frac{g}{i}100. \qquad (10.10)$$

Если доход по облигации выплачивается несколько раз в году, то рыночная цена равна:

$$P = \frac{gN}{p[(1+i)^{1/p}-1]}, \qquad (10.11)$$

курсовая стоимость такой облигации:

$$K = \frac{g}{p[(1+i)^{1/p}-1]}100. \qquad (10.12)$$

Облигации без выплаты процентов (с нулевым купоном)

В таких облигациях один источник дохода – разность между ценой приобретения и номиналом, если облигация погашается по номиналу.

$$P = Nv^n, \qquad (10.13)$$

$$K = v^n 100. \qquad (10.14)$$

Очевидно, что курс уменьшается вместе с ростом рыночной ставки и срока облигации.

Облигации с выплатой процентов и номинала в конце срока

Общая сумма, которую получит владелец облигации при ее погашении, равна $N(1+g)^n$. Соответственно, расчетная цена и курс при ставке помещения i составят:

$$P = N\left(\frac{1+g}{1+i}\right)^n, \qquad (10.15)$$

$$K = \left(\frac{1+g}{1+i}\right)^n 100. \qquad (10.16)$$

Из последней формулы следует, что курс определяется тремя параметрами, причем влияние срока зависит от соотношения ставок g и i. Если $g > i$, то, как видим, с увеличением срока курс растет.

Облигации с периодической выплатой процентов и погашением номинала в конце срока

Напомним, что доход от таких облигаций имеет два источника - периодически получаемые проценты и разность между ценой приобретения и выкупной ценой.

Для облигаций с годовыми купонами цена определяется следующей зависимостью:

$$P = Nv^n + gNa_{n;i}, \tag{10.17}$$

курсовая стоимость:

$$K = (v^n + ga_{n;i})100. \tag{10.18}$$

На курс рассмотренных выше облигаций влияют различные факторы. Изменение купонной ставки увеличивает курс в целом, причем чем больше рыночная ставка, тем меньше это влияние при всех прочих равных условиях.

Что касается влияния рыночной ставки процента или ставки помещения, то повышение этой ставки приводит к уменьшению курса облигации. Чем больше срок облигации, тем чувствительней курс к изменению рыночной ставки.

Сказанное объясняет тактику поведения инвесторов на рынке облигаций. Так, *если ожидается повышение рыночной ставки, то инвесторы стремятся заменить долгосрочные облигации на облигации с меньшим сроком*. При ожидании снижения ставки происходит обратное.

Степень влияния уровня рыночной ставки на курс облигации зависит и от размера купонной нормы дохода – чем она выше, тем меньше влияет изменение ставки. Указанная зависимость лежит в основе следующего правила поведения инвесторов: при ожидании повышения рыночной ставки для инвестора предпочтительней покупать облигации с высокой купонной доходностью и, наоборот, при понижении ставки для инвестора целесообразно вкладывать деньги в облигации с низкой купонной доходностью.

Можно сделать следующие выводы относительно поведения цены облигации на рынке ценных бумаг:

- если рыночная норма прибыли превосходит фиксированную купонную ставку, облигация продается со скидкой (дисконтом), т.е. по цене ниже номинала;
- если рыночная норма прибыли меньше фиксированной купонной ставки, облигация продается с премией, т.е. по цене выше номинала (разница между рыночной ценой и номиналом называется «ажио»);

• если рыночная норма прибыли совпадает с фиксированной купонной ставкой, облигация продается по своей нарицательной стоимости;

• рыночная норма прибыли и текущая цена облигации с фиксированной купонной ставкой находятся в обратно пропорциональной зависимости – с ростом (убыванием) рыночной нормы прибыли текущая цена такой облигации убывает (возрастает).

Проблема оценивания облигаций существует не только тогда, когда облигация покупается или продается на рынке, но и когда она находится у владельца. В общем случае ее цена изменяется во времени даже в такой крайне редкой ситуации, когда рыночная процентная ставка остается постоянной и уж тем более, если эта ставка изменяется.

С приближением даты погашения облигации увеличивается современная стоимость суммы, получаемой при погашении данной облигации, одновременно уменьшается современная стоимость будущих поступлений по купонам. Какой бы ни была цена до погашения, в конце срока цена облигации равна номиналу или некоторой заранее зафиксированной выкупной цене.

Основные термины и понятия:

Облигации
Номинальная цена
Выкупная цена
Купонная ставка
Облигации с нулевым купоном
Полная доходность
Бессрочные облигации
Рыночная цена
Курс облигации
Купонная доходность
Текущая доходность

Вопросы для обсуждения:

1. Что такое облигация? Какие преимущества дает облигация своему владельцу?
2. Определите основные параметры облигации.
3. По каким признакам различаются облигации? Приведите примеры известных вам облигаций.
4. Какой вид облигаций считается преобладающим и почему?
5. Что представляет собой чистая рыночная цена? Может ли рыночная цена быть равной номиналу?
6. Как на доход инвестора повлияет досрочный выкуп облигации эмитентом?
7. Для чего рассчитывается курс облигации?
8. Что включает в себя доход от облигации? Как показатели доходности это учитывают?
9. Что такое купонная доходность и как она определяется?
10. Чем текущая доходность отличается от полной доходности?
11. Как определяются показатели доходности для различных видов облигаций?

Задачи и ситуации:

1. Облигация номиналом 500 руб. продается по цене 465 руб. Определите курс данной облигации.

2. Облигации с нулевым купоном номинальной стоимостью 1000 руб. и сроком погашения через 5 лет продаются за 560,35 руб. Проанализировать целесообразность приобретения этих облигаций, если имеется возможность альтернативного инвестирования с нормой прибыли 14%.

3. Бессрочные облигации, приносящие 5% дохода, куплены по курсу 90. Определите финансовую эффективность вложений при условии, что проценты выплачиваются раз в полгода.

4. *Имеются две десятилетние облигации. Облигация 1 с купоном 5%* продается по курсу 90. Облигация 2 с купоном 5,85% продается по номиналу. Какую облигацию вы предпочтете? Почему? Подкрепите свои рассуждения соответствующими расчетами.

5. Рассчитайте рыночную цену облигации нарицательной стоимостью 1 тыс. руб., купонной ставкой 16% годовых и сроком погашения через шесть лет, если рыночная норма прибыли по финансовым инструментам такого класса равна 12%. Проценты по облигации выплачиваются один раз в год.

6. Номинал облигации, до погашения которой остается пять лет, равен 2 тыс. руб., купон 20% выплачивается один раз в год. Определите цену облигации, чтобы она обеспечила покупателю доходность до погашения 25% годовых.

РЕКОМЕНДАЦИИ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Несмотря на кажущуюся сложность и обилие формул, хочется напомнить, что любые самые сложные операции сводятся в известном смысле к четырем элементарным арифметическим действиям и, зная эти действия, можно вполне содержать финансы в порядке.

Для того чтобы понять и осмыслить любые финансовые вычисления, необходимо знать, как минимум, основные, базовые формулы, по которым легко определить значение любого содержащегося в формуле параметра при известных всех остальных. Например, неизвестный срок операции наращения процентов можно определить из базовой формулы наращения по простым или сложным процентам. Кроме того, формулу нельзя применить, если не знать хотя бы приблизительно ее вид, чтобы затем найти ее в соответствующей теме.

Многочисленные формулы, отражающие соотношения между эквивалентными ставками, получаются путем приравнивания друг другу соответствующих множителей наращения или дисконтирования.

Задачи финансового характера часто допускают более одного способа решения, и эта возможность не только позволяет проверить правильность ответа, но и лучше проясняет сущность задач и используемых при их решении формул.

Для упрощения процедуры расчета многих коэффициентов применяются специальные таблицы (см. приложение), например, таблица порядковых номеров дней в году, по которой можно определить продолжительность финансовой операции вычитанием номера первого дня из номера последнего дня.

И в заключение хочется привести слова Кряжева В.С., издавшего первое систематическое руководство по коммерческой арифметике в России в 1811 году: «При немногом размышлении можно избежать много труда...Вообще во всяком деле человеческом размышление и суждение доставляет великие пользы...»

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

1. Ковалев В.В., Уланов В.А. Курс финансовых вычислений. – М.: Финансы и статистика, 2002. – 348 с.

2. Кочович Е. Финансовая математика: Теория и практика финансово-банковских расчетов. – М.: Финансы и статистика, 2002. – 371 с.

3. Четыркин Е.М. Финансовый анализ производственных инвестиций. – М.: Дело, 2001. – 256 с.

4. Четыркин Е.М. Методы финансовых и коммерческих расчетов. – М.: Дело, 1995. – 320 .

5. Четыркин Е.М. Финансовая математика. – М.: Дело, 2004. – 400 с.

Дополнительная литература

1. Едронова В.Н., Мизиковский Е.А. Учет и анализ финансовых активов: акции, облигации, векселя. – М.: Финансы и статистика, 1999. – 230 с.

2. Ершов Ю.С. Финансовая математика. – Новосибирск, 2002. – 212 с.

3. Игонина Л.Л. Инвестиции. – М.: Юристъ, 2002. – 480 с.

4. Рэдхэд К., Хьюс С. Управление финансовыми рисками. Пер. с англ. – М.: ИНФРА-М, 1996. - 288 с.

5. *Капитоненко В.В. Финансовая математика и ее приложения.* – М.: Издательство ПРИОР, 1998. – 144 с.

6. Ковалев В.В. Финансовый анализ. Управление капиталом. Выбор инвестиций. Анализ отчетности. – М.: Финансы и статистика, 1998. – 432 с.

7. Солодовников А.С., Бабайцев В.А. Математика в экономике: Учебн. в 2 ч. – М.: Финансы и статистика, 2000.

8. Теплова Т.В. Финансовые решения: стратегия и тактика. - М.: Магистр, 1998. – 264 с.

9. Тренев Н.Н. Управление финансами. – М.: Финансы и статистика, 2003. – 496 с.

10. Финансы и кредит. Под ред. А.М. Ковалевой. – М.: Финансы и статистика, 2003. – 512 с.

11. Шеремет А.Д., Баканов М.И. Теория экономического анализа. – М.: Финансы и статистика, 2002. – 416 с.

Пособия и методические материалы

1. Герасименко Г.П., Маркарьян С.Э., Шумилин Е.П. Управленческий, финансовый и инвестиционный анализ: Практикум. – Ростов-на-Дону: Март, 2002. – 160 с.

2. Ковалев В.В. Сборник задач по финансовому анализу: Учеб. пособие. – М.: Финансы и статистика, 2000. – 128 с.

3. Сапин В.А. Техника финансово-экономических расчетов: Учеб. пособие. – М.: Финансы и статистика, 2000. – 80 с.

4. Уланов В.А. Сборник задач по курсу финансовых вычислений: Учеб. пособие. - М.: Финансы и статистика, 2000. – 40 с.

5. Беляева Е.С. Методы финансовых и коммерческих расчетов: Методическое пособие / Рубцовский индустриальный институт. - Рубцовск, 2005. – 70 с.

Таблица 1. Множители наращения

n \ i	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	11%	12%	13%	14%	15%	16%	20%	25%	30%	35%
1	1,010	1,020	1,030	1,040	1,050	1,060	1,070	1,080	1,090	1,100	1,110	1,120	1,130	1,140	1,150	1,160	1,200	1,250	1,300	1,350
2	1,020	1,040	1,061	1,082	1,103	1,124	1,145	1,166	1,188	1,210	1,232	1,254	1,277	1,300	1,323	1,346	1,440	1,563	1,690	1,823
3	1,030	1,061	1,093	1,125	1,158	1,191	1,225	1,260	1,295	1,331	1,368	1,405	1,443	1,482	1,521	1,561	1,728	1,953	2,197	2,460
4	1,041	1,082	1,126	1,170	1,216	1,262	1,311	1,360	1,412	1,464	1,518	1,574	1,630	1,689	1,749	1,811	2,074	2,441	2,856	3,322
5	1,051	1,104	1,159	1,217	1,276	1,338	1,403	1,469	1,539	1,611	1,685	1,762	1,842	1,925	2,011	2,100	2,488	3,052	3,713	4,484
6	1,062	1,126	1,194	1,265	1,340	1,419	1,501	1,587	1,677	1,772	1,870	1,974	2,082	2,195	2,313	2,436	2,986	3,815	4,827	6,053
7	1,072	1,149	1,230	1,316	1,407	1,504	1,606	1,714	1,828	1,949	2,076	2,211	2,353	2,502	2,660	2,826	3,583	4,768	6,275	8,172
8	1,083	1,172	1,267	1,369	1,477	1,594	1,718	1,851	1,993	2,144	2,305	2,476	2,658	2,853	3,059	3,278	4,300	5,960	8,157	11,032
9	1,094	1,195	1,305	1,423	1,551	1,689	1,838	1,999	2,172	2,358	2,558	2,773	3,004	3,252	3,518	3,803	5,160	7,451	10,604	14,894
10	1,105	1,219	1,344	1,480	1,629	1,791	1,967	2,159	2,367	2,594	2,839	3,106	3,395	3,707	4,046	4,411	6,192	9,313	13,786	20,107
11	1,116	1,243	1,384	1,539	1,710	1,898	2,105	2,332	2,580	2,853	3,152	3,479	3,836	4,226	4,652	5,117	7,430	11,642	17,922	27,144
12	1,127	1,268	1,426	1,601	1,796	2,012	2,252	2,518	2,813	3,138	3,498	3,896	4,335	4,818	5,350	5,936	8,916	14,552	23,298	36,644
13	1,138	1,294	1,469	1,665	1,886	2,133	2,410	2,720	3,066	3,452	3,883	4,363	4,898	5,492	6,153	6,886	10,699	18,190	30,288	49,470
14	1,149	1,319	1,513	1,732	1,980	2,261	2,579	2,937	3,342	3,797	4,310	4,887	5,535	6,261	7,076	7,988	12,839	22,737	39,374	66,784
15	1,161	1,346	1,558	1,801	2,079	2,397	2,759	3,172	3,642	4,177	4,785	5,474	6,254	7,138	8,137	9,266	15,407	28,422	51,186	90,158
16	1,173	1,373	1,605	1,873	2,183	2,540	2,952	3,426	3,970	4,595	5,311	6,130	7,067	8,137	9,358	10,748	18,488	35,527	66,542	121,71
17	1,184	1,400	1,653	1,948	2,292	2,693	3,159	3,700	4,328	5,054	5,895	6,866	7,986	9,276	10,761	12,468	22,186	44,409	86,504	164,31
18	1,196	1,428	1,702	2,026	2,407	2,854	3,380	3,996	4,717	5,560	6,544	7,690	9,024	10,575	12,375	14,463	26,623	55,511	112,46	221,82
19	1,208	1,457	1,754	2,107	2,527	3,026	3,617	4,316	5,142	6,116	7,263	8,613	10,197	12,056	14,232	16,777	31,948	69,389	146,19	299,46
20	1,220	1,486	1,806	2,191	2,653	3,207	3,870	4,661	5,604	6,727	8,062	9,646	11,523	13,743	16,367	19,461	38,338	86,736	190,05	404,27
21	1,232	1,516	1,860	2,279	2,786	3,400	4,141	5,034	6,109	7,400	8,949	10,804	13,021	15,668	18,822	22,574	46,005	108,42	247,06	545,77
22	1,245	1,546	1,916	2,370	2,925	3,604	4,430	5,437	6,659	8,140	9,934	12,100	14,714	17,861	21,645	26,186	55,206	135,53	321,18	736,79
23	1,257	1,577	1,974	2,465	3,072	3,820	4,741	5,871	7,258	8,954	11,026	13,552	16,627	20,362	24,891	30,376	66,247	169,41	417,54	994,66
24	1,270	1,608	2,033	2,563	3,225	4,049	5,072	6,341	7,911	9,850	12,239	15,179	18,788	23,212	28,625	35,236	79,497	211,76	542,80	1342,8
25	1,282	1,641	2,094	2,666	3,386	4,292	5,427	6,848	8,623	10,835	13,585	17,000	21,231	26,462	32,919	40,874	95,396	264,70	705,64	1812,8
30	1,348	1,811	2,427	3,243	4,322	5,743	7,612	10,063	13,268	17,449	22,892	29,960	39,116	50,950	66,212	85,850	237,38	807,79	2620,0	8128,5
35	1,417	2,000	2,814	3,946	5,516	7,686	10,677	14,785	20,414	28,102	38,575	52,800	72,069	98,100	133,17	180,31	590,67	2465,2	9727,9	36449,
40	1,489	2,208	3,262	4,801	7,040	10,286	14,974	21,725	31,409	45,259	65,001	93,051	132,78	188,88	267,86	378,72	1469,8	7523,2	36119,	
45	1,565	2,438	3,782	5,841	8,985	13,765	21,002	31,920	48,327	72,890	100,53	163,99	244,64	363,68	538,77	705,44	1657,3	22959,		
50	1,645	2,692	4,384	7,107	11,467	18,420	29,457	46,902	74,358	117,39	184,56	289,00	450,74	700,23	1083,7	1670,7	9100,4	70065,		

Таблица 2. Дисконтирующие множители

n \ r	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	11%	12%	13%	14%	15%	16%	17%	18%	19%	20%	25%	30%	35%
1	,990	,980	,971	,962	,952	,943	,935	,926	,917	,909	,901	,893	,885	,877	,870	,862	,855	,847	,840	,833	,800	,769	,741
2	,980	,961	,943	,925	,907	,890	,873	,857	,842	,826	,812	,797	,783	,769	,756	,743	,731	,718	,706	,694	,640	,592	,549
3	,971	,942	,915	,889	,864	,840	,816	,794	,772	,751	,731	,712	,693	,675	,658	,641	,624	,609	,593	,579	,512	,455	,406
4	,961	,924	,888	,855	,823	,792	,763	,735	,708	,683	,659	,636	,613	,592	,572	,552	,534	,516	,499	,482	,410	,350	,301
5	,951	,906	,863	,822	,784	,747	,713	,681	,650	,621	,593	,567	,543	,519	,497	,476	,456	,437	,419	,402	,328	,269	,223
6	,942	,888	,837	,790	,746	,705	,666	,630	,596	,564	,535	,507	,480	,456	,432	,410	,390	,370	,352	,335	,262	,207	,165
7	,933	,871	,813	,760	,711	,665	,623	,583	,547	,513	,482	,452	,425	,400	,376	,354	,333	,314	,296	,279	,210	,159	,122
8	,923	,853	,789	,731	,677	,627	,582	,540	,502	,467	,434	,404	,376	,351	,327	,305	,285	,266	,249	,233	,168	,123	,091
9	,914	,837	,766	,703	,645	,592	,544	,500	,460	,424	,391	,361	,333	,308	,284	,263	,243	,225	,209	,194	,134	,094	,067
10	,905	,820	,744	,676	,614	,558	,508	,463	,422	,386	,352	,322	,295	,270	,247	,227	,208	,191	,176	,162	,107	,073	,050
11	,896	,804	,722	,650	,585	,527	,475	,429	,388	,350	,317	,287	,261	,237	,215	,195	,178	,162	,148	,135	,086	,056	,037
12	,887	,788	,701	,625	,557	,497	,444	,397	,356	,319	,286	,257	,231	,208	,187	,168	,152	,137	,124	,112	,069	,043	,027
13	,879	,773	,681	,601	,530	,469	,415	,368	,326	,290	,258	,229	,204	,182	,163	,145	,130	,116	,104	,093	,055	,033	,020
14	,870	,758	,661	,577	,505	,442	,388	,340	,299	,263	,232	,205	,181	,160	,141	,125	,111	,099	,088	,078	,044	,025	,015
15	,861	,743	,642	,555	,481	,417	,362	,315	,275	,239	,209	,183	,160	,140	,123	,108	,095	,084	,074	,065	,035	,020	,011
16	,853	,728	,623	,534	,458	,394	,339	,292	,252	,218	,188	,163	,141	,123	,107	,093	,081	,071	,062	,054	,028	,015	,008
17	,844	,714	,605	,513	,436	,371	,317	,270	,231	,198	,170	,146	,125	,108	,093	,080	,069	,060	,052	,045	,023	,012	,006
18	,836	,700	,587	,494	,416	,350	,296	,250	,212	,180	,153	,130	,111	,095	,081	,069	,059	,051	,044	,038	,018	,009	,005
19	,828	,686	,570	,475	,396	,331	,277	,232	,194	,164	,138	,116	,098	,083	,070	,060	,051	,043	,037	,031	,014	,007	,003
20	,820	,673	,554	,456	,377	,312	,258	,215	,178	,149	,124	,104	,087	,073	,061	,051	,043	,037	,031	,026	,012	,005	,002
21	,811	,660	,538	,439	,359	,294	,242	,199	,164	,135	,112	,093	,077	,064	,053	,044	,037	,031	,026	,022	,009	,004	,002
22	,803	,647	,522	,422	,342	,278	,226	,184	,150	,123	,101	,083	,068	,056	,046	,038	,032	,026	,022	,018	,007	,003	,001
23	,795	,634	,507	,406	,326	,262	,211	,170	,138	,112	,091	,074	,060	,049	,040	,033	,027	,022	,018	,015	,006	,002	,001
24	,788	,622	,492	,390	,310	,247	,197	,158	,126	,102	,082	,066	,053	,043	,035	,028	,023	,019	,015	,013	,005	,002	,001
25	,780	,610	,478	,375	,295	,233	,184	,146	,116	,092	,074	,059	,047	,038	,030	,024	,020	,016	,013	,010	,004	,001	,001
30	,742	,552	,412	,308	,231	,174	,131	,099	,075	,057	,044	,033	,026	,020	,015	,012	,009	,007	,005	,004	,001		
35	,706	,500	,355	,253	,181	,130	,094	,068	,049	,036	,026	,019	,014	,010	,008	,006	,004	,003	,002	,002			
40	,672	,453	,307	,208	,142	,097	,067	,046	,032	,022	,015	,011	,008	,005	,004	,003	,002	,001	,001	,001			
45	,639	,410	,264	,171	,111	,073	,048	,031	,021	,014	,009	,006	,004	,003	,002	,001	,001	,001					
50	,608	,372	,228	,141	,087	,054	,034	,021	,013	,009	,005	,003	,002	,001	,001	,001							

Таблица 3. Множители наращения ренты

r / n	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	11%	12%	13%	14%	15%	16%	20%	25%	30%	35%
1	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
2	2,010	2,020	2,030	2,040	2,050	2,060	2,070	2,080	2,090	2,100	2,110	2,120	2,130	2,140	2,150	2,160	2,200	2,250	2,300	2,350
3	3,030	3,060	3,091	3,122	3,153	3,184	3,215	3,246	3,278	3,310	3,342	3,374	3,407	3,440	3,473	3,506	3,640	3,813	3,990	4,173
4	4,060	4,122	4,184	4,246	4,310	4,375	4,440	4,506	4,573	4,641	4,710	4,779	4,850	4,921	4,993	5,066	5,368	5,766	6,187	6,633
5	5,101	5,204	5,309	5,416	5,526	5,637	5,751	5,867	5,985	6,105	6,228	6,353	6,480	6,610	6,742	6,877	7,442	8,207	9,043	9,954
6	6,152	6,308	6,468	6,633	6,802	6,975	7,153	7,336	7,523	7,716	7,913	8,115	8,323	8,536	8,754	8,977	9,930	11,259	12,756	14,438
7	7,214	7,434	7,662	7,898	8,142	8,394	8,654	8,923	9,200	9,487	9,783	10,089	10,405	10,730	11,067	11,414	12,916	15,073	17,583	20,492
8	8,286	8,583	8,892	9,214	9,549	9,897	10,260	10,637	11,028	11,436	11,859	12,300	12,757	13,233	13,727	14,240	16,499	19,842	23,858	28,664
9	9,369	9,755	10,159	10,583	11,027	11,491	11,978	12,488	13,021	13,579	14,164	14,776	15,416	16,085	16,786	17,519	20,799	25,802	32,015	39,696
10	10,462	10,950	11,464	12,006	12,578	13,181	13,816	14,487	15,193	15,937	16,722	17,549	18,420	19,337	20,304	21,321	25,959	33,253	42,619	54,590
11	11,567	12,169	12,808	13,486	14,207	14,972	15,784	16,645	17,560	18,531	19,561	20,655	21,814	23,045	24,349	25,733	32,150	42,566	56,405	74,697
12	12,683	13,412	14,192	15,026	15,917	16,870	17,888	18,977	20,141	21,384	22,713	24,133	25,650	27,271	29,002	30,850	39,581	54,208	74,327	101,84
13	13,809	14,680	15,618	16,627	17,713	18,882	20,141	21,495	22,953	24,523	26,212	28,029	29,985	32,089	34,352	36,786	48,497	68,760	97,625	138,48
14	14,947	15,974	17,086	18,292	19,599	21,015	22,550	24,215	26,019	27,975	30,095	32,393	34,883	37,581	40,505	43,672	59,196	86,949	127,91	187,95
15	16,097	17,293	18,599	20,024	21,579	23,276	25,129	27,152	29,361	31,772	34,405	37,280	40,417	43,842	47,580	51,660	72,035	109,69	167,29	254,74
16	17,258	18,639	20,157	21,825	23,657	25,673	27,888	30,324	33,003	35,950	39,190	42,753	46,672	50,980	55,717	60,925	87,442	138,11	218,47	344,90
17	18,430	20,012	21,762	23,698	25,840	28,213	30,840	33,750	36,974	40,545	44,501	48,884	53,739	59,118	65,075	71,673	105,93	173,64	285,01	466,61
18	19,615	21,412	23,414	25,645	28,132	30,906	33,999	37,450	41,301	45,599	50,396	55,750	61,725	68,394	75,836	84,141	128,12	218,04	371,52	630,92
19	20,811	22,841	25,117	27,671	30,539	33,760	37,379	41,446	46,018	51,159	56,939	63,440	70,749	78,969	88,212	98,603	154,74	273,56	483,97	852,75
20	22,019	24,297	26,870	29,778	33,066	36,786	40,995	45,762	51,160	57,275	64,203	72,052	80,947	91,025	102,44	115,38	186,69	342,94	630,17	1152,2
21	23,239	25,783	28,676	31,969	35,719	39,993	44,865	50,423	56,765	64,002	72,265	81,699	92,470	104,77	118,81	134,84	225,03	429,68	820,22	1556,5
22	24,472	27,299	30,537	34,248	38,505	43,392	49,006	55,457	62,873	71,403	81,214	92,503	105,49	120,44	137,63	157,41	271,03	538,10	1067,3	2102,3
23	25,716	28,845	32,453	36,618	41,430	46,996	53,436	60,893	69,532	79,543	91,148	104,60	120,20	138,30	159,28	183,60	326,24	673,63	1388,5	2839,0
24	26,973	30,422	34,426	39,083	44,502	50,816	58,177	66,765	76,790	88,497	102,17	118,16	136,83	158,66	184,17	213,98	392,48	843,03	1806,0	3833,7
25	28,243	32,030	36,459	41,646	47,727	54,865	63,249	73,106	84,701	98,347	114,41	133,33	155,62	181,87	212,79	249,21	471,98	1054,8	2348,8	5176,5
30	34,785	40,568	47,575	56,085	66,439	79,058	94,461	113,28	136,31	164,49	199,02	241,33	293,20	356,79	434,75	530,31	1181,9	3227,2	8730,0	23222,
35	41,660	49,994	60,462	73,652	90,320	111,43	138,24	172,32	215,71	271,02	341,59	431,66	546,68	693,57	881,17	1120,7	2948,3	9856,8	32423,	
40	48,886	60,402	75,401	95,026	120,80	154,76	199,64	259,06	337,88	442,59	581,83	767,09	1013,7	1342,0	1779,1	2360,8	7343,9	30089,		
45	56,481	71,893	92,720	121,03	159,70	212,74	285,75	386,51	525,86	718,90	986,64	1358,2	1874,2	2590,6	3585,1	4965,3	18281,	91831,		
50	64,463	84,579	112,80	152,67	209,35	290,34	406,53	573,77	815,08	1163,9	1668,8	2400,0	3459,5	4994,5	7217,7	10436,	45497,			

Таблица 4. Дисконтирующие множители ренты

n	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	11%	12%	13%	14%	15%	16%	17%	18%	19%	20%	25%	30%	35%
1	0,990	0,980	0,971	0,962	0,952	0,943	0,935	0,926	0,917	0,909	0,901	0,893	0,885	0,877	0,870	0,862	0,855	0,847	0,840	0,833	0,800	0,769	0,741
2	1,970	1,942	1,913	1,886	1,859	1,833	1,808	1,783	1,759	1,736	1,713	1,690	1,668	1,647	1,626	1,605	1,585	1,566	1,547	1,528	1,440	1,361	1,289
3	2,941	2,884	2,829	2,775	2,723	2,673	2,624	2,577	2,531	2,487	2,444	2,402	2,361	2,322	2,283	2,246	2,210	2,174	2,140	2,106	1,952	1,816	1,696
4	3,902	3,808	3,717	3,630	3,546	3,465	3,387	3,312	3,240	3,170	3,102	3,037	2,974	2,914	2,855	2,798	2,743	2,690	2,639	2,589	2,362	2,166	1,997
5	4,853	4,713	4,580	4,452	4,329	4,212	4,100	3,993	3,890	3,791	3,696	3,605	3,517	3,433	3,352	3,274	3,199	3,127	3,058	2,991	2,689	2,436	2,220
6	5,795	5,601	5,417	5,242	5,076	4,917	4,767	4,623	4,486	4,355	4,231	4,111	3,998	3,889	3,784	3,685	3,589	3,498	3,410	3,326	2,951	2,643	2,385
7	6,728	6,472	6,230	6,002	5,786	5,582	5,389	5,206	5,033	4,868	4,712	4,564	4,423	4,288	4,160	4,039	3,922	3,812	3,706	3,605	3,161	2,802	2,508
8	7,652	7,325	7,020	6,733	6,463	6,210	5,971	5,747	5,535	5,335	5,146	4,968	4,799	4,639	4,487	4,344	4,207	4,078	3,954	3,837	3,329	2,925	2,598
9	8,566	8,162	7,786	7,435	7,108	6,802	6,515	6,247	5,995	5,759	5,537	5,328	5,132	4,946	4,772	4,607	4,451	4,303	4,163	4,031	3,463	3,019	2,665
10	9,471	8,983	8,530	8,111	7,722	7,360	7,024	6,710	6,418	6,145	5,889	5,650	5,426	5,216	5,019	4,833	4,659	4,494	4,339	4,192	3,571	3,092	2,715
11	10,368	9,787	9,253	8,760	8,306	7,887	7,499	7,139	6,805	6,495	6,207	5,938	5,687	5,453	5,234	5,029	4,836	4,656	4,486	4,327	3,656	3,147	2,752
12	11,255	10,575	9,954	9,385	8,863	8,384	7,943	7,536	7,161	6,814	6,492	6,194	5,918	5,660	5,421	5,197	4,988	4,793	4,611	4,439	3,725	3,190	2,779
13	12,134	11,348	10,635	9,986	9,394	8,853	8,358	7,904	7,487	7,103	6,750	6,424	6,122	5,842	5,583	5,342	5,118	4,910	4,715	4,533	3,780	3,223	2,799
14	13,004	12,106	11,296	10,563	9,899	9,295	8,745	8,244	7,786	7,367	6,982	6,628	6,302	6,002	5,724	5,468	5,229	5,008	4,802	4,611	3,824	3,249	2,814
15	13,865	12,849	11,938	11,118	10,380	9,712	9,108	8,559	8,061	7,606	7,191	6,811	6,462	6,142	5,847	5,575	5,324	5,092	4,876	4,675	3,859	3,268	2,825
16	14,718	13,578	12,561	11,652	10,838	10,106	9,447	8,851	8,313	7,824	7,379	6,974	6,604	6,265	5,954	5,668	5,405	5,162	4,938	4,730	3,887	3,283	2,834
17	15,562	14,292	13,166	12,166	11,274	10,477	9,763	9,122	8,544	8,022	7,549	7,120	6,729	6,373	6,047	5,749	5,475	5,222	4,990	4,775	3,910	3,295	2,840
18	16,398	14,992	13,754	12,659	11,690	10,828	10,059	9,372	8,756	8,201	7,702	7,250	6,840	6,467	6,128	5,818	5,534	5,273	5,033	4,812	3,928	3,304	2,844
19	17,226	15,678	14,324	13,134	12,085	11,158	10,336	9,604	8,950	8,365	7,839	7,366	6,938	6,550	6,198	5,877	5,584	5,316	5,070	4,843	3,942	3,311	2,848
20	18,046	16,351	14,877	13,590	12,462	11,470	10,594	9,818	9,129	8,514	7,963	7,469	7,025	6,623	6,259	5,929	5,628	5,353	5,101	4,870	3,954	3,316	2,850
21	18,857	17,011	15,415	14,029	12,821	11,764	10,836	10,017	9,292	8,649	8,075	7,562	7,102	6,687	6,312	5,973	5,665	5,384	5,127	4,891	3,963	3,320	2,852
22	19,660	17,658	15,937	14,451	13,163	12,042	11,061	10,201	9,442	8,772	8,176	7,645	7,170	6,743	6,359	6,011	5,696	5,410	5,149	4,909	3,970	3,323	2,853
23	20,456	18,292	16,444	14,857	13,489	12,303	11,272	10,371	9,580	8,883	8,266	7,718	7,230	6,792	6,399	6,044	5,723	5,432	5,167	4,925	3,976	3,325	2,854
24	21,243	18,914	16,936	15,247	13,799	12,550	11,469	10,529	9,707	8,985	8,348	7,784	7,283	6,835	6,434	6,073	5,746	5,451	5,182	4,937	3,981	3,327	2,855
25	22,023	19,523	17,413	15,622	14,094	12,783	11,654	10,675	9,823	9,077	8,422	7,843	7,330	6,873	6,464	6,097	5,766	5,467	5,195	4,948	3,985	3,329	2,856
30	25,808	22,396	19,600	17,292	15,372	13,765	12,409	11,258	10,274	9,427	8,694	8,055	7,496	7,003	6,566	6,177	5,829	5,517	5,235	4,979	3,995	3,332	2,857
35	29,409	24,999	21,487	18,665	16,374	14,498	12,948	11,655	10,567	9,644	8,855	8,176	7,586	7,070	6,617	6,215	5,858	5,539	5,251	4,992	3,998	3,333	2,857
40	32,835	27,355	23,115	19,793	17,159	15,046	13,332	11,925	10,757	9,779	8,951	8,244	7,634	7,105	6,642	6,233	5,871	5,548	5,258	4,997	3,999	3,333	2,857
45	36,095	29,490	24,519	20,720	17,774	15,456	13,606	12,108	10,881	9,863	9,008	8,283	7,661	7,123	6,654	6,242	5,877	5,552	5,261	4,999	4,000	3,333	2,857
50	39,196	31,424	25,730	21,482	18,256	15,762	13,801	12,233	10,962	9,915	9,042	8,304	7,675	7,133	6,661	6,246	5,880	5,554	5,262	4,999	4,000	3,333	2,857

Таблица 5

Порядковые номера дней в году

	Я	Ф	М	А	М	И	И	А	С	О	Н	Д
День месяца	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337
4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339
6	6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346
13	13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361
28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362
29	29		88	119	149	180	210	241	272	302	333	363
30	30		89	120	150	181	211	242	273	303	334	364
31	31		90		151		212	243		304		365

Таблица 6

Формулы для расчета срока постоянных рент постнумерандо

Количество платежей	**Количество начислений**	**S**	**A**
p=1	m=1	$n=\dfrac{\ln\left(\dfrac{S}{R}*i+1\right)}{\ln(1+i)}$	$n=\dfrac{\ln\left(1-\dfrac{A}{R}*i\right)^{-1}}{\ln(1+i)}$
	m>1	$n=\dfrac{\ln\{\dfrac{S}{R}[(1+j/m)^{m}-1]+1\}}{m*\ln(1+j/m)}$	$n=\dfrac{\ln\{1-\dfrac{A}{R}[(1+j/m)^{m}-1]\}^{-1}}{m*\ln(1+j/m)}$
p>1	m=1	$n=\dfrac{\ln\{\dfrac{S}{R}p[(1+i)^{1/p}-1]+1\}}{\ln(1+i)}$	$n=\dfrac{\ln\{1-\dfrac{A}{R}p[(1+i)^{1/p}-1]\}^{-1}}{\ln(1+i)}$
	m=p	$n=\dfrac{\ln\left(\dfrac{S}{R}j+1\right)}{m*\ln(1+j/m)}$	$n=\dfrac{\ln\left(1-\dfrac{A}{R}j\right)^{-1}}{m*\ln(1+j/m)}$
	m p	$n=\dfrac{\ln\{\dfrac{S}{R}p[(1+j/m)^{m/p}-1]+1\}}{m*\ln(1+j/m)}$	$n=\dfrac{\ln\{1-\dfrac{A}{R}p[(1+j/m)^{m/p}-1]\}^{-1}}{m*\ln(1+j/m)}$